LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Obras que integran el bloque 7 (*Cálculo diferencial*):

Módulo I
Introducción al Cálculo diferencial

Módulo 2
Límite de una función

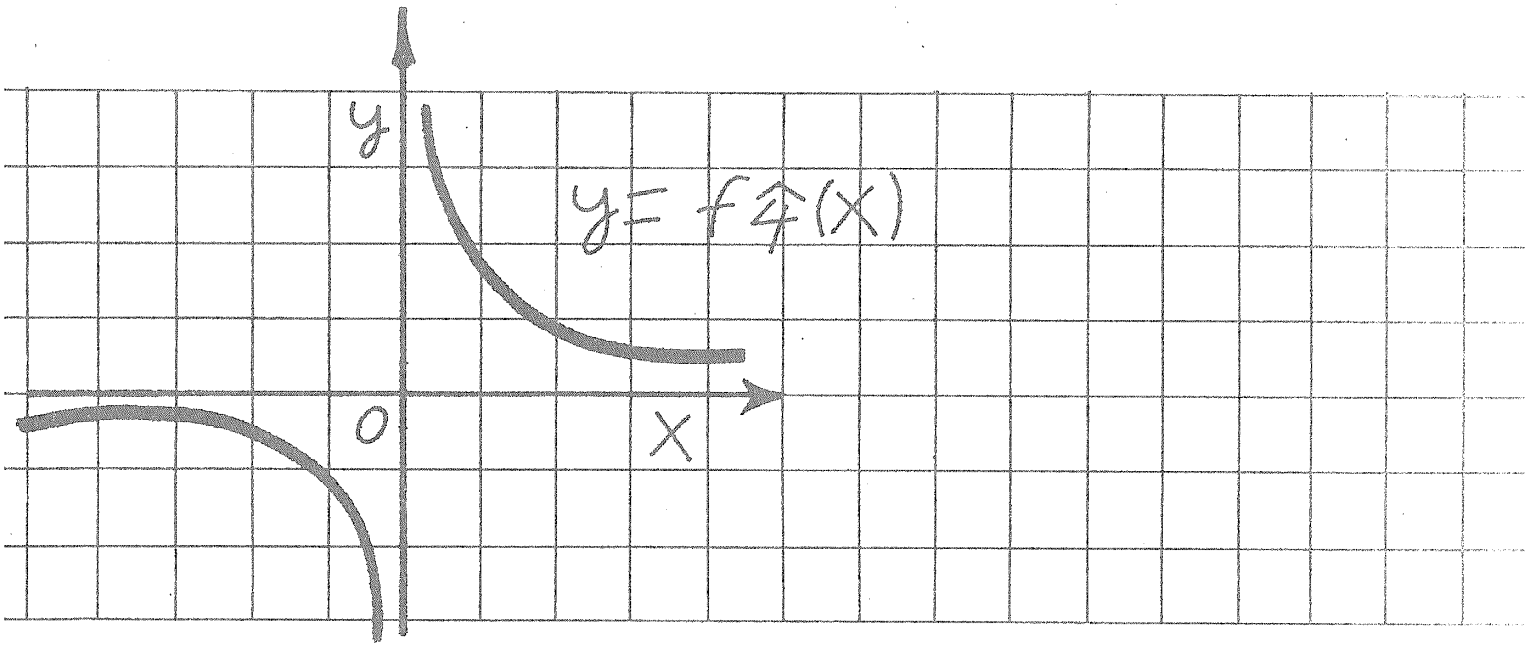
Módulo 3
Continuidad de una función

Módulo 4
Derivación de funciones algebráicas

Módulo 5
Derivación de funciones trascendentes

Módulo 6
Extremos de una función
(máximos y mínimos)

ANUIES
Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Aprendizaje paso a paso

Bloque 7
Cálculo diferencial

Módulo 2
LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España,
Puerto Rico, Venezuela

La presentación y disposición en conjunto de
LÍMITE DE UNA FUNCIÓN
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, enero 1985
ISBN 968-24-0849-0

Impreso en México

Esta obra se terminó de imprimir
el día 2 de enero de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO RCR KC 100

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

2.1 Funciones continuas o discontinuas 9

2.2 Definición de límite de una función 21

2.3 Algunos teoremas sobre límites (1) 31

2.4 Algunos teoremas sobre límites (2) 38

2.5 Límite de un cociente de funciones cuando los límites del numerador y del denominador son ambos nulos 58

2.6 Límites unilaterales 68

2.7 Límites al infinito 77

2.8 Límites infinitos 85

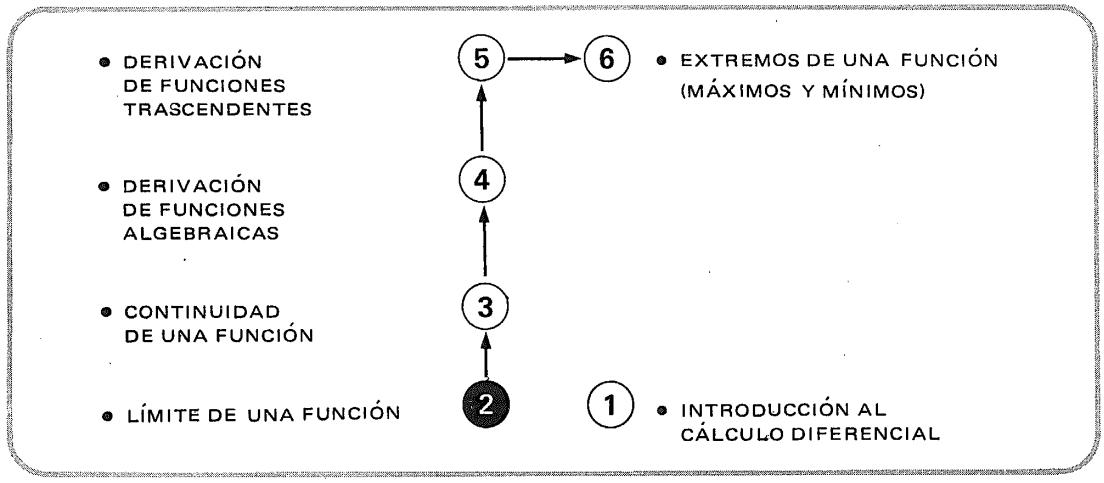
2.9 Resumen 106

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 7. Cálculo diferencial

Objetivos: derivar funciones algebraicas o trascendentes, y aplicar los conocimientos correspondientes a la resolución de problemas prácticos

Esquema estructural del bloque 7



Módulo 2. Límite de una función

Objetivos: establecer algunos teoremas sobre límites y aplicarlos a la determinación del límite de una función dada

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Manejo de expresiones algebraicas		
– enteras	1	7, 8, 9
– racionales	1	11
– reales	1	13
• Relación y función (concepto, elementos, clasificación y representación gráfica)	2	7, 8
• Conceptos geométricos básicos	4	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
• Conceptos trigonométricos básicos	5	1, 3, 5, 6
• Conceptos básicos de la geometría analítica	6	1, 2

2.1

Funciones continuas o discontinuas

1

Hemos visto que
para algunas funciones
se verifica

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Les llamamos
funciones continuas.

2

Intuitivamente,
podemos identificar una

función continua

cuando su gráfica es
"una curva sin saltos",
es decir, que puede ser
trazada sin levantar el lápiz
del papel.

3

Podemos hablar de

función continua en un punto dado

y de

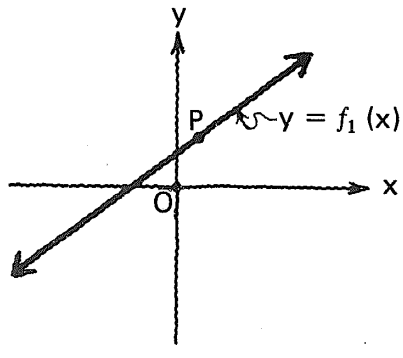
función continua en un intervalo dado.

4

Intentemos señalar
las opciones correctas
en los ejercicios de los
cuadros siguientes.

5

La función
definida por la
ecuación $y = f_1(x)$
y cuya gráfica se muestra:



es/no es

continua *en el punto P*;

es/no es

continua *en el intervalo*

$(-\infty, +\infty)$.*

* Es decir, para toda $x \in (-\infty, +\infty)$.

es

es

6

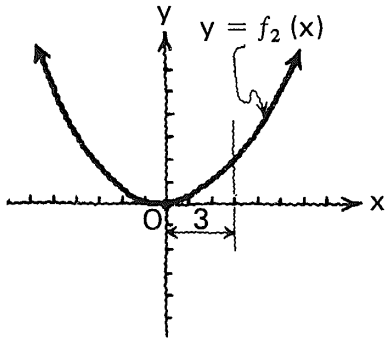
La función f_2

es/no es

continua *en el punto O;*

es/no es

continua *en el intervalo* [0, 3].*



es

es

* Es decir: para toda $x \in [0, 3]$.

7

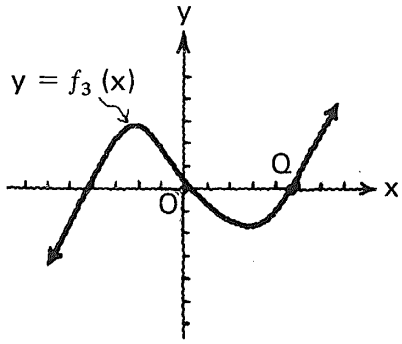
La función f_3

es/no es

continua en el punto Q;

es/no es

continua en el intervalo
$(-\infty, 0)$.



es

es

8

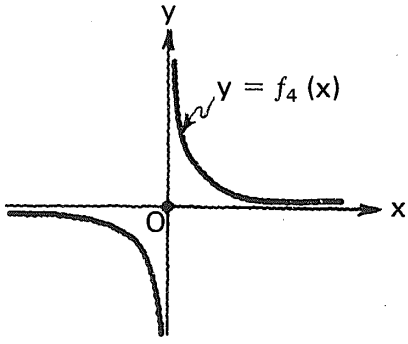
La función f_4

es/no es

continua en el punto O;

es/no es

continua en el intervalo
$(-\infty, +\infty)$



no es

no es

9

La función f_5

es/no es

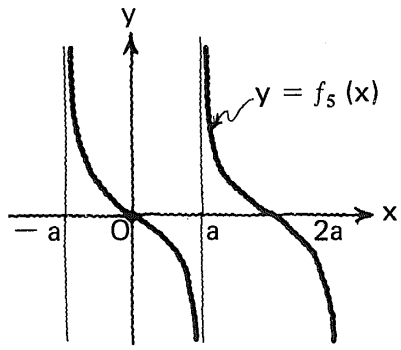
continua en el punto O;

es/no es

continua en el punto de abscisa a;

es/no es

continua en el intervalo [— a, 2a].



es

no es

no es

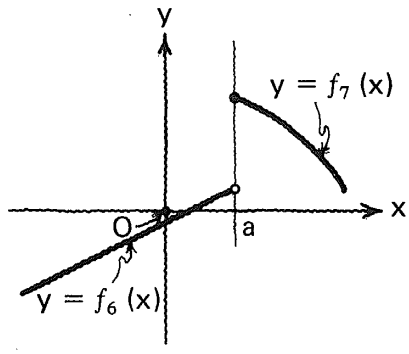
10

La función aquí representada está definida por:

$y = f_6(x)$ si $x < a$
$y = f_7(x)$ si $x \geqslant a$

Tal función **es/no es** continua para x = a;

es/no es continua en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.



no es

no es

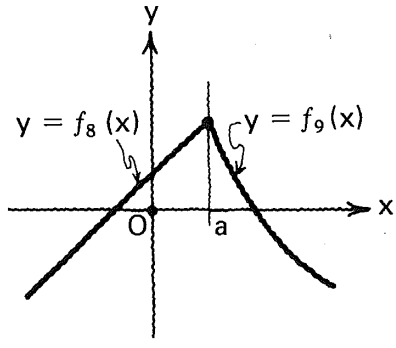
11

La función representada y definida así:

$y = f_8(x)$ si $x < a$
$y = f_9(x)$ si $x \geqslant a$

es/no es continua para x = a;

es/no es continua en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.



es

es

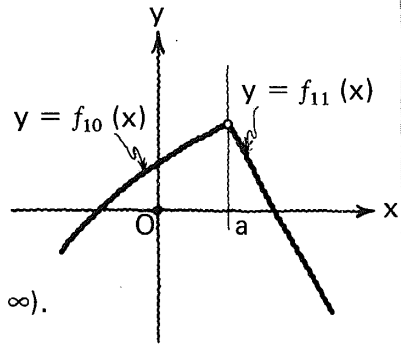
12

La función representada y definida así:

$y = f_{10}(x)$ si $x < a$
$y = f_{11}(x)$ si $x > a$

es/no es continua para $x = a$;

es/no es continua para $(-\infty, +\infty)$.



no es

no es

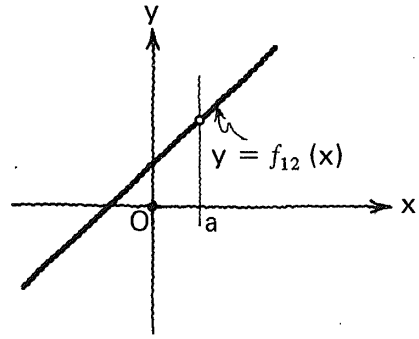
13

La función representada y definida así:

$y = f_{12}(x)$ si $x \neq o$

es/no es continua para $x = a$;

es/no es continua en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.



no es

no es

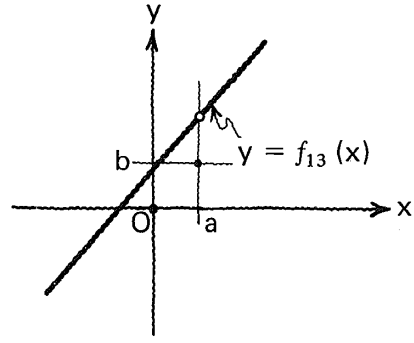
14

La función representada y definida así:

$y = f_{13}(x)$ si $x \neq a$
$y = b$ si $x = a$

es/no es continua para $x = a$;

es/no es continua en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.



no es

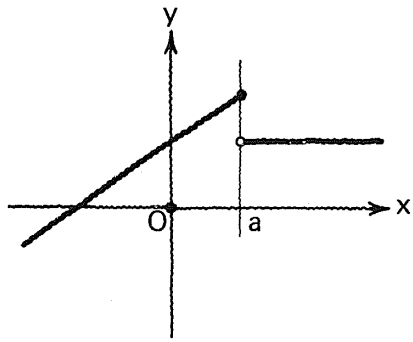
no es

15

A una función que no es continua le llamamos

discontinua.

Decimos, por ejemplo, que la función aquí representada tiene una **discontinuidad** en $x = a$, o que es **discontinua** para $x = a$.



16

El modelo matemático de algunas situaciones reales puede estar constituido por funciones que presentan discontinuidades en algunos puntos o intervalos, de aquí la importancia de su estudio.

17

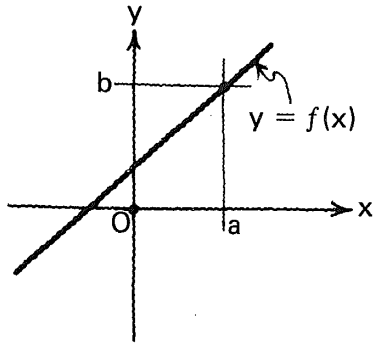
Los conceptos de **límite** y **continuidad** de una función están íntimamente relacionados.

18

La noción intuitiva de límite que hemos manejado hasta este momento,* nos permite afirmar que cuando menos para las funciones continuas:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

siendo b = [ ]



* Véase módulo 1 de cálculo diferencial.

$f(a)$

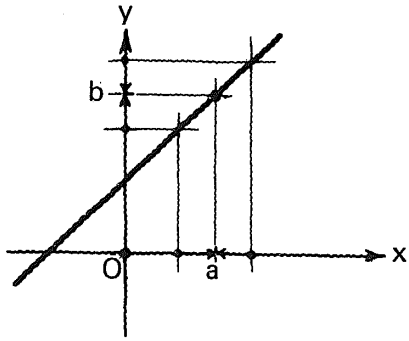
19

Hemos aceptado que:

si y [es decir: $f(x)$] "tiende a" **b** [es decir: a $f(a)$] cuando x "tiende a" **a** entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

siendo b = $f(a)$.

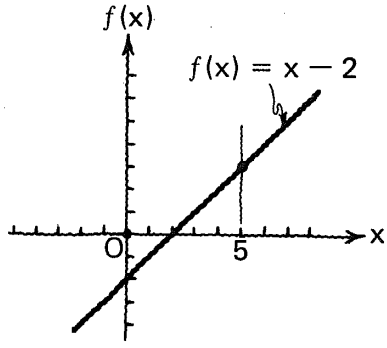


20

Por ejemplo:

$$\lim_{x \to 5} (x - 2) =$$ [ ]

Intuitivamente podemos ver que, si x "tiende a" 5, por la derecha o por la izquierda, y = $f(x)$ "tiende a" [ ]



3 [es decir; $f(5)$]

3

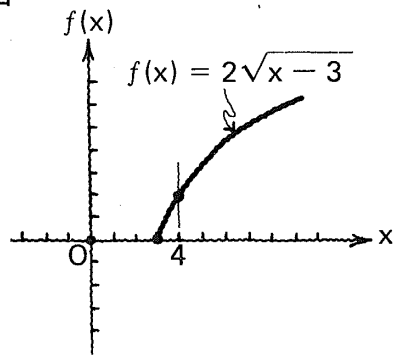
21

$\lim_{x \to 4} 2\sqrt{x-3} =$ [ ]

Aceptamos que:

si
x "tiende a" **4**,
tanto por la derecha
como
por la izquierda,
$f(x)$ "tiende a" [ ]

por la noción intuitiva que
tenemos de continuidad.



2 [es decir: $f(4)$]

2

22

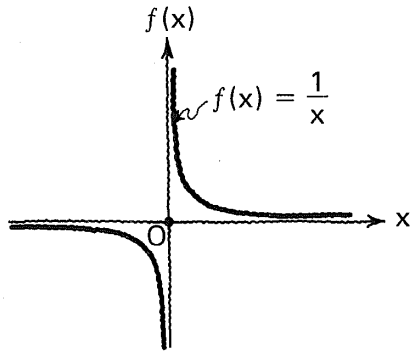
Pero,
$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = ?$

La función es
discontinua
para $x = 0$.

Si **x** "tiende a" 0
por la izquierda,

$f(x)$ [ ]

Describir el
comportamiento
de $f(x)$.



Atención.

$f(x)$ disminuye
"sin límite".

Este hecho lo
simbolizamos así

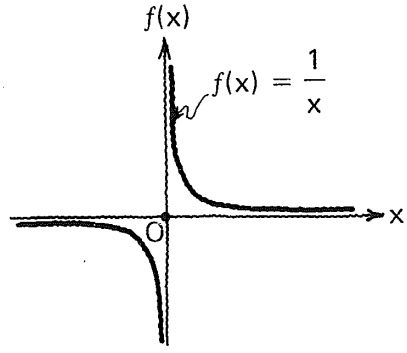
$f(x) \to -\infty$

23

Si **x** "tiende a" **0**
por la derecha,

$f(x)$ [ ]

Describir el
comportamiento
de $f(x)$.



Atención.

$f(x)$ aumenta
"sin límite".

Este hecho lo
simbolizamos así

- $f(x) \to +\infty$

24

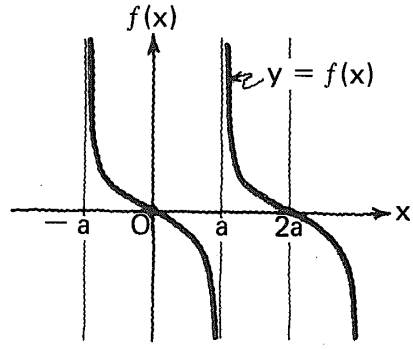
$\lim_{x \to a} f(x) = ?$

Si **x** "tiende a" **a** por la izquierda,

$f(x)$ _____

Si **x** "tiende a" **a** por la derecha,

$f(x)$ _____



"disminuye sin límite" ($f(x) \to -\infty$)

"aumenta sin límite" ($f(x) \to +\infty$)

25

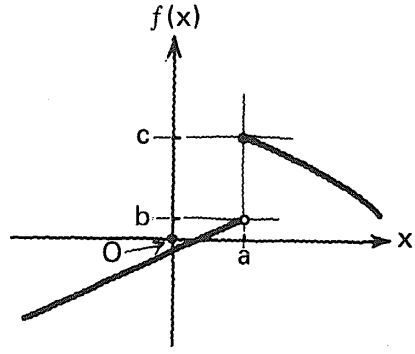
$\lim_{x \to a} f(x) = ?$

Si $x \to a$ por la izquierda

$f(x)$ _____

Si $x \to a$ por la derecha

$f(x)$ _____



"tiende a" **b**

"tiende a" **c**

26

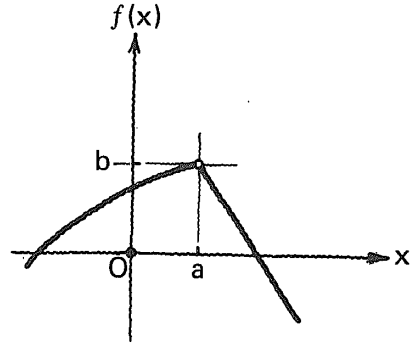
$\lim_{x \to a} f(x) = ?$

Si $x \to a$ por la izquierda

$f(x)$ _____

Si $x \to a$ por la derecha

$f(x)$ _____



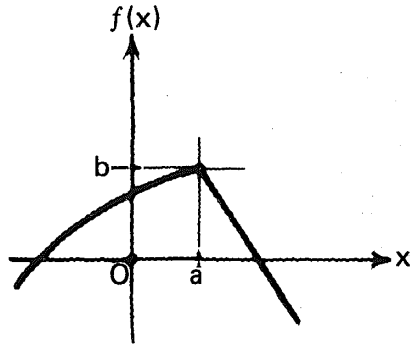
"tiende a" b

"tiende a" **b**

27

Observar con atención.

$\lim_{x \to a} f(x) =$ [ ]



de acuerdo con lo que hemos aceptado, pero no se verifica que:

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

puesto que $f(a)$ no está definida.

b

28

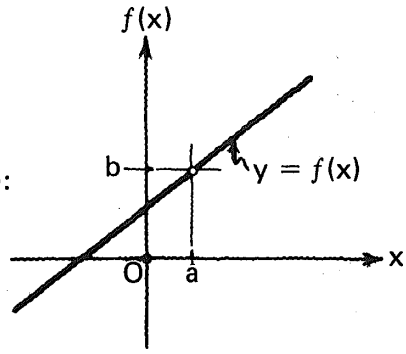
Similarmente,

$\lim_{x \to a} f(x) =$ [ ]

y **se verifica/no se verifica** que:

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

porque [ ]



b

no se verifica

$f(a)$ no está definida

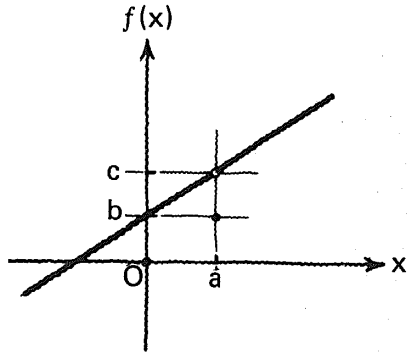
29

$\lim_{x \to a} f(x) =$ [ ]

y
se verifica/no se verifica
que:

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

porque [ ]



c

no se verifica

$f(a) = b$

30

Atención.

$\lim_{x \to a} f(x) =$ [ ]

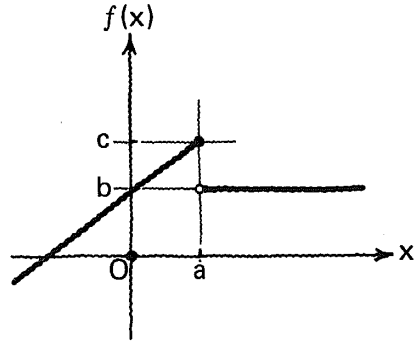
y

se verifica/no se verifica que:

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

porque

[ ]



?

no se verifica

- si $x \to a$ por la izquierda $f(x) \to c$

y

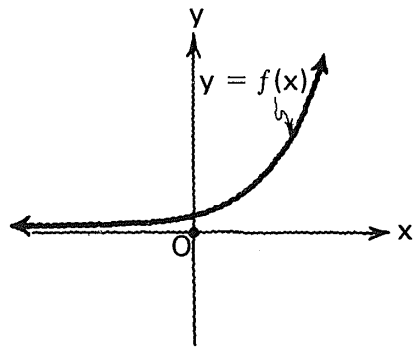
si $x \to a$ por la derecha $f(x) \to b$

31

Otras situaciones que no hemos definido.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = ?$

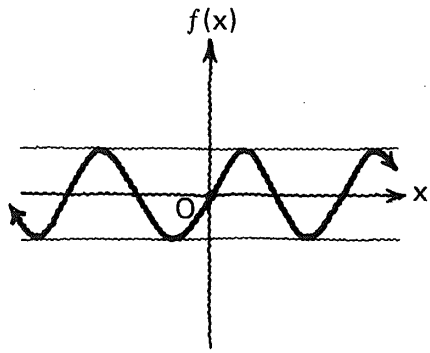
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = ?$



32

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = ?$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = ?$



33

Para responder a estas interrogantes no nos basta la noción de

límite de una función

que hemos venido manejando.

34

Necesitamos definir, en forma más precisa, lo que queremos que se entienda por:

límite de una función.

7.2.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *explicar*, con sus propias palabras, por qué es necesario definir de manera precisa lo que debemos entender por **límite de una función.**

2.2

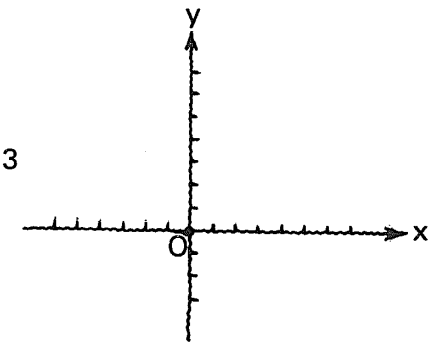
Definición de límite de una función

35

Consideremos la función

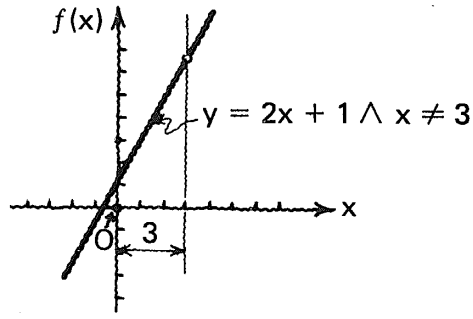
$y = 2x + 1 \quad x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 3$

cuya gráfica vamos a trazar.



Respuesta en el cuadro siguiente

Aproximémonos por ejemplo, a 3, a través de valores de x menores que 3, es decir, hagamos tender a x hacia 3 por la izquierda, completando esta tabla:

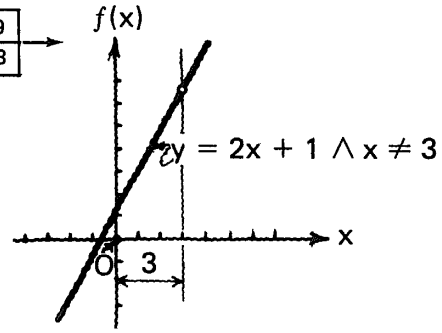


x	2	2.5	2.75	2.99	2.999
$f(x)$					

2	2.5	2.75	2.99	2.999
5	6	6.50	6.98	6.998

36

$x \rightarrow$	2	2.5	2.75	2.99	2.999
$f(x) \rightarrow$	5	6	6.50	6.98	6.998

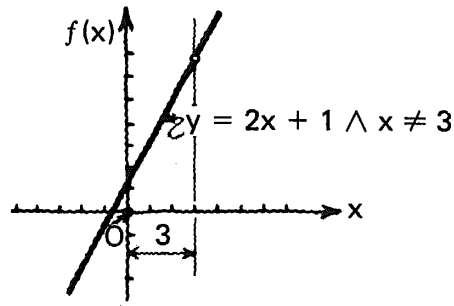


Observamos que:
a medida que **x**
se aproxima a 3
por la izquierda,
$f(x)$ se aproxima a [ ]

7

37

3.01	3.10	3.25	3.5	4	← x
					← $f(x)$



Completando esta tabla
nos damos cuenta que
a medida que **x**
se aproxima a 3
por la derecha,
$f(x)$ se aproxima a [ ]

3.01	3.10	3.25	3.5	4	← x
7.02	7.2	7.5	8	9	← $f(x)$

7

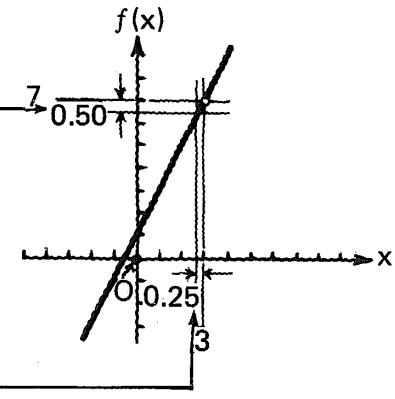
38

Veámoslo de esta
otra manera:

si por ejemplo:

$x = 2.75 \rightarrow f(x) = 6.50$

$3 - 2.75 = 0.25$ $\quad 7 - 6.50 = 0.50$

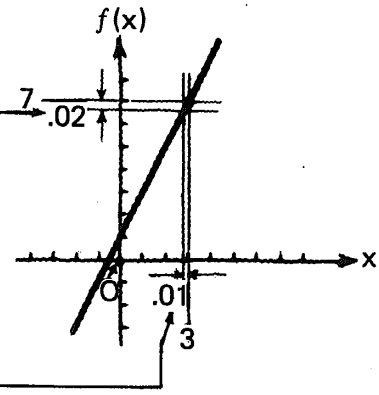


39

Si, por ejemplo:

$x = 2.99$ → $f(x) = 6.98$

$3 - 2.99 = 0.01$ $\quad$ $7 - 6.98 = 0.02$

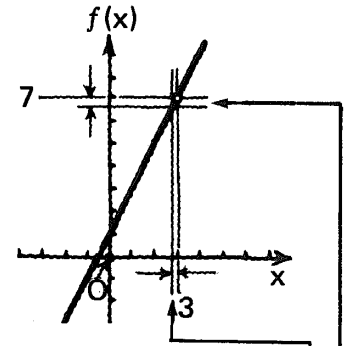


40

Si, por ejemplo:

$x = 2.999$ → $f(x) = 6.998$

$|x - 3| =$ ____ $\quad$ $|f(x) - 7| =$ ____



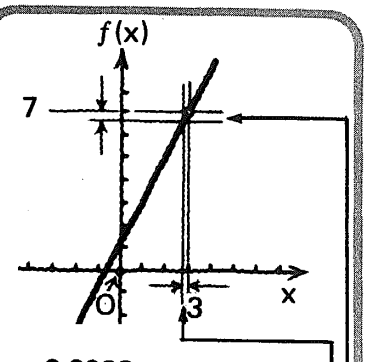
- $3 - 2.999 = 0.001$
- $7 - 6.998 = 0.002$

41

Si, por ejemplo:

$x = 2.9999$ → $f(x) =$ ____

$|x - 3| =$ ____ $\quad$ $|f(x) - 7| =$ ____

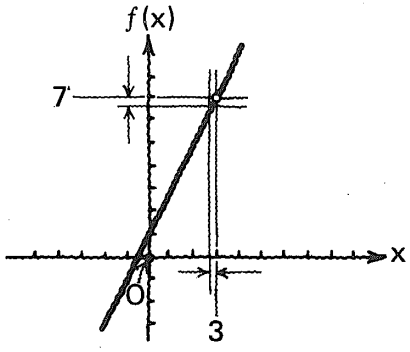


- 6.9998
- $3 - 2.9999 = 0.0001$
- $7 - 6.9998 = 0.0002$

42

Podemos observar que:

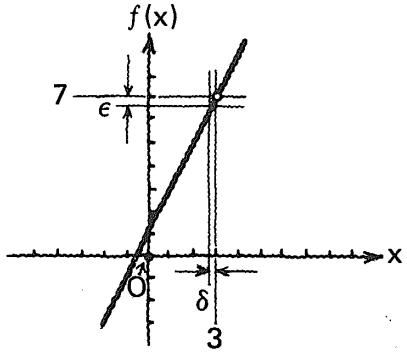
$f(x)$ puede acercarse tanto como queramos a 7, acercando a x lo suficiente a 3.



43

Además:

existe una relación definida entre estas dos pequeñas diferencias, las que denotaremos con δ y ϵ como se indica en la figura.



44

Por ejemplo:

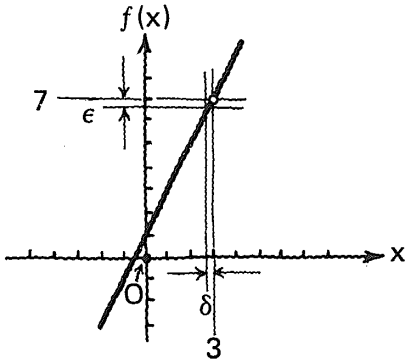
Si queremos que ϵ sea igual a **0.000000002** bastará con tomar

$\delta =$ [ ]

En esta forma, **x** será igual a [ ]

y $f(x)$ será igual a

[ ]



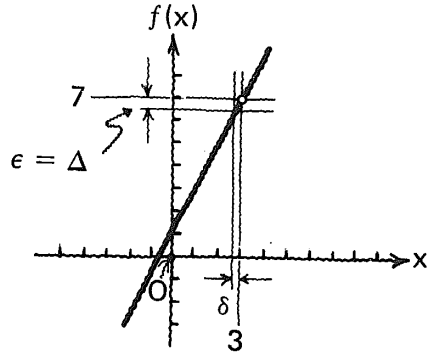
0.000000001

3 — 0.000000001 = 2.999999999

7 — 0.000000002 = 6.999999998

45

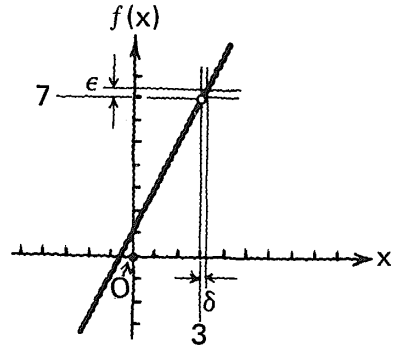
Si queremos que ϵ sea igual a un cierto número Δ bastará con tomar $\delta =$ ⌊____⌋



$\frac{\Delta}{2}$

46

Podemos hacer el mismo razonamiento cuando x se aproxima a 3 por la derecha.



47

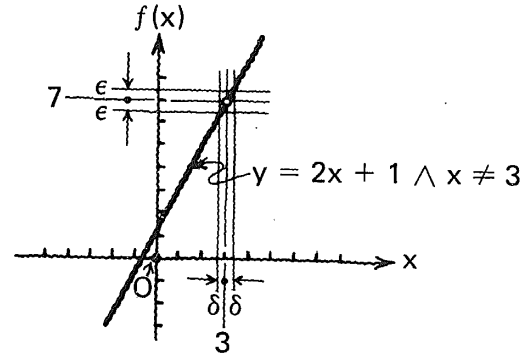
Estudiar con atención.

Puesto que:
para cualquier valor positivo de ϵ, no importando qué tan pequeño sea, podemos encontrar un valor positivo de δ, de tal manera que

$|f(x) - 7| < \epsilon$ siempre que $0 < |x - 3| < \delta$

decimos que:

$\lim_{x \to 3} 2x + 1 = 7$

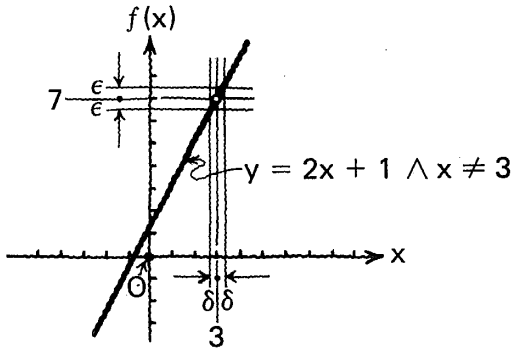


48

Tengamos en cuenta que:
en este análisis,
nos interesan valores de x
tan cercanos a 3 como
queramos, pero nos tiene
sin cuidado lo que sucede a
la función cuando
$x = 3$.

En el caso de la función
que hemos venido considerando,
$f(x)$ no está definida para
$x = 3$, y sin embargo:

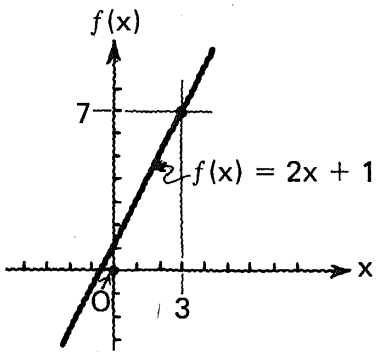
$\lim_{x \to 3} 2x + 1 = 7.$



49

En el caso de la función
que ahora aparece representada,
$f(x)$ está definida para
$x = 3$,
puesto que
$f(3) = 7$
y seguimos teniendo:

$\lim_{x \to 3} 2x + 1 = 7.$



50

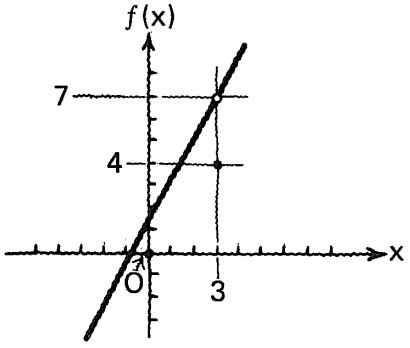
La función que ahora
representamos,
está definida así:

$f(x) = 2x + 1$ si $x \neq 3$
$f(x) = 4$ si $x = 3$

También en este caso:

$\lim_{x \to 3} 2x + 1 = 7$

aunque $f(3) = 4$.



51

Estamos en condiciones
de establecer la
siguiente **definición** de
límite de una función.

52

Estudiar con mucha atención.

Definición. $\lim_{x \to a} f(x) = L$

si para cualquier $\epsilon > 0$ tan pequeña como queramos
existe una $\delta > 0$
tal que

$|f(x) - L| < \epsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$

f es una función definida para toda x
de un intervalo abierto que
contiene a a, excepto posiblemente
para $x = a$.

53

Entonces, por medio de
la definición del cuadro
anterior podemos probar
si un cierto número L
es el límite de una función
$y = f(x)$ cuando x tiende
a un cierto número a.

Veamos cómo funciona esto.

54

Se requiere determinar $\lim_{x \to 4} 3x - 2 \quad x \in \mathbb{R}$

Conjetura:

$\lim_{x \to 4} 3x - 2 = f(4)$ [_____]

10

55

Necesitamos, ahora, probar que:

$\lim_{x \to 4} 3x - 2 = 10$

Observamos que $f(x) = 3x - 2$ **está/no está** definida para todos los posibles valores de x en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

está

$(3x - 2) \in \mathbb{R} \; \forall \, x \in \mathbb{R}$

56

$\lim_{x \to 4} 3x - 2 = 10$

Necesitamos demostrar que:

para cualquier $\epsilon > 0$ tan pequeña como se quiera existe una $\delta > 0$ tal que

$|(3x - 2) - 10| < \epsilon$ siempre que [_____]

$0 < |x - 4| < \delta$

57

Estudiar con mucha atención. $\lim_{x \to 4} 3x - 2 = 10$

$0 < \epsilon$

$|(3x - 2) - 10| < \epsilon$ siempre que $0 < |x - 4| < \delta$

↓ suprimiendo paréntesis y reduciendo términos semejantes, tenemos:

$|3x - 12| < \epsilon$

↓ factorizando:

$|3(x - 4)| < \epsilon$

Continúa en el cuadro siguiente.

58

$|3(x - 4)| < \epsilon$

↓ sustituyendo $|3(x - 4)|$ por su equivalente $3|x - 4|$:

$3|x - 4| < \epsilon$

↓ resolviendo para $|x - 4|$:

$|x - 4| < \frac{\epsilon}{3}$

↓

$0 < |x - 4| < \frac{\epsilon}{3}$ para $\delta = \frac{\epsilon}{3}$

59

Atención. $\lim_{x \to 4} 3x - 2 = 10$

Vemos que, si tomamos $\delta = \frac{\epsilon}{3}$

$0 < |x - 4| < \frac{\epsilon}{3}$

obtenemos, multiplicando por 3:

$0 < 3|x - 4| < \epsilon$

y sustituyendo $3|x - 4|$ por su equivalente $|(3x - 2) - 10|$:

$|(3x - 2) - 10| < \epsilon$

60

Atención $\lim_{x \to 4} 3x - 2 = 10$

Si queremos, por ejemplo, que el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y 10 sea menor que 0.0000003

tomamos $\delta < 0.0000001$

En tal caso:

$3.9999999 < x < 4$ y $_____ < f(x) < 10$

o bien:

$4 < x < 4.0000001$ y $10 < f(x) < _____$

$3 \times 3.9999999 - 2$

$= 9.9999997$

$3 \times 4.0000001 - 2$

$= 10.0000003$

7.2.2.1

Práctica adicional de prueba de expresiones de la forma

$\lim_{x \to a} f(x) = L$

para funciones algebraicas sencillas, haciendo uso de la definición de límite, si se considera necesario.

7.2.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *enunciar* y *explicar* la definición formal de límite de una función;
- *probar* que un cierto número es el límite de una función $y = f(x)$, cuando x tiende a un cierto número a, haciendo uso de la definición de límite y siendo f una función algebraica sencilla.

2.3

Algunos teoremas sobre límites (1)

61

Empleando la definición de límite establecida en el submódulo anterior, podemos demostrar un conjunto de **teoremas** que nos permitirán evaluar los **límites** de algunas funciones algebraicas de uso frecuente.

62

Por ejemplo.

Queremos demostrar que

$$\lim_{x \to a} (mx + b) = \square \qquad m, b \in \mathbb{R},\ m \neq 0$$

Intentemos escribir el resultado a manera de conjetura

$ma + b$

63

Demostrar que $\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$ $\quad m, b \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$

Hay que probar que:

para cualquier $\epsilon > 0$ tan pequeña como queramos existe una $\delta > 0$, tal que:

[ ] siempre que [ ]

$|(mx + b) - (ma + b)| < \epsilon$
$0 < |x - a| < \delta$

64

Demostrar que: $\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$ $\quad m, b \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$

Para toda $\epsilon > 0$
existe una $\delta > 0$,
tal que:

$|(mx + b) - (ma + b)| < \epsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Atención.

Demostrar que $\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$ $\quad m, b \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$

Para toda $\epsilon > 0$, existe una $\delta > 0$, tal que:

$|(mx + b) - (ma + b)| < \epsilon$ **siempre que** $0 < |x - a| < \delta$

$|mx + b - ma - b| < \epsilon$

$|mx - ma| < \epsilon$

$|m(x - a)| < \epsilon$

$|m| \cdot |x - a| < \epsilon$

puesto que $m \neq 0$

$|x - a| < \frac{\epsilon}{|m|}$

$0 < |x - a| < \frac{\epsilon}{|m|}$

se cumple para $a = \frac{\epsilon}{|m|}$

65

Ahora, vamos a demostrar que $\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$ $\quad b \in \mathbb{R} \wedge m = 0$

Para toda $\epsilon > 0$, existe una $\delta > 0$, tal que:

$|(mx + b) - (ma + b)| < \epsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$:

Respuesta en el cuadro siguiente

$\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$ $\quad b \in \mathbb{R} \wedge m = 0$

Para toda $\epsilon > 0$, existe una $\delta > 0$, tal que:

$|(mx + b) - (ma + b)| < \epsilon$ **siempre que** $0 < |x - a| < \delta$

$|\cancel{mx} + \cancel{b} - \cancel{ma} - \cancel{b}| = 0$

puesto que $m = 0$
$mx = 0$
$ma = 0$

se cumple para toda $\delta > 0$

$0 < \epsilon$

66

La expresión $\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$ $\quad m = 0$

podemos escribirla así: _____

$\lim_{x \to a} b = b$

el límite de una constante es la constante misma.

67

Si $m = 1$ y $b = 0$

la expresión $\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$

toma la forma: [ ]

$\lim_{x \to a} x = a$

68

En resumen y en orden:

Teorema L 1: $\lim_{x \to a} c = c$

Teorema L 2: $\lim_{x \to a} x = a$

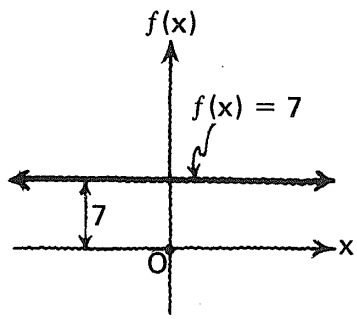
Teorema L 3: $\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$

69

Determinemos algunos límites aplicando los teoremas anteriores.

Por ejemplo:

$\lim_{x \to 3} 7 =$ [ ] por teorema [ ]



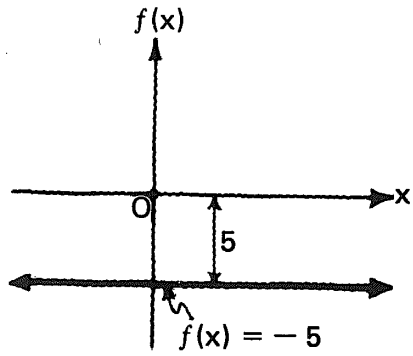
para cualquier intervalo abierto que contenga a $x = 3$, ya que la función está definida para toda $x \in \mathcal{R}$.

7 L1

70

$\lim_{x \to 0} (-5) =$ ____

por teorema ____



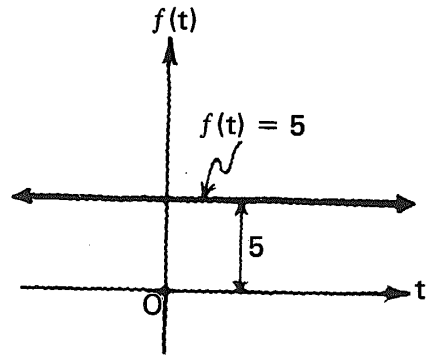
-5

L1

71

$\lim_{t \to 5} t =$ ____

por teorema ____



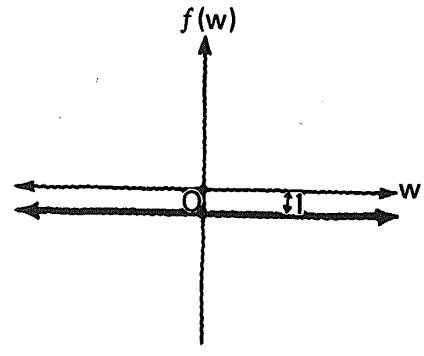
5

L2

72

$\lim_{w \to -1} w =$ ____

por teorema ____



-1

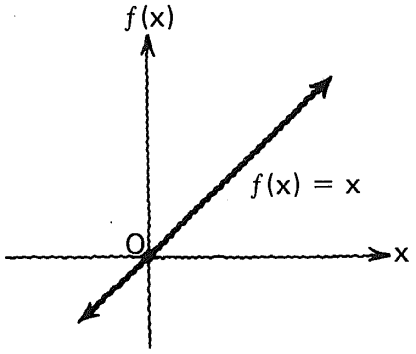
L2

73

$\lim_{x \to h} x =$ [ ]

por teorema [ ]

para cualquier intervalo abierto que contenga a $x = h$, ya que la función se define para toda $x \in \mathcal{R}$.



h

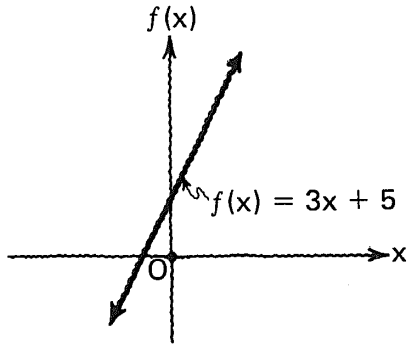
L2

74

Para cualquier intervalo abierto que contenga a $x = 2$, ya que la función se define $\forall\ x \in \mathcal{R}$:

$\lim_{x \to 2} 3x + 5 =$ [ ]

por teorema [ ]



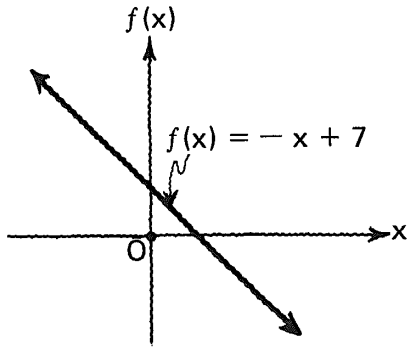
11

L3

7F

$\lim_{x \to 5} (-x + 7) =$ [ ]

por teorema [ ]



2

L3

7.2.3.1

Práctica adicional de
determinación del límite de una función
de alguna de las formas

$f(x) = c$
$f(x) = x$
$f(x) = mx + b$

haciendo uso de los teoremas
de límites L1, L2 y L3,
si se considera necesario.

7.2.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *demostrar* los siguientes teoremas
  a partir de la definición de límite:

  TL1. $\lim_{x \to a} c = c$

  TL2. $\lim_{x \to a} x = a$

  TL3. $\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$

- *determinar* el límite de una función
  de alguna de las formas:

  $f(x) = c$
  $f(x) = x$
  $f(x) = mx + b$

  aplicando los teoremas TL1, TL2 y TL3.

2.4

Algunos teoremas sobre límites (2)

76

A los tres teoremas que hemos demostrado vamos a agregar otros que aceptaremos sin demostración.

77

Estudiar con atención.

Teorema L4. Límite de una potencia entera.

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n \qquad n \in \mathbb{Z}^+$$

78

Calcular, para cualquier intervalo abierto que contenga a $x = 2$, ya que la función está definida para toda $x \in \mathcal{R}$:

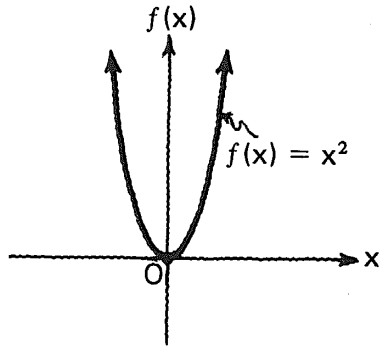
$\lim_{x \to 2} x^2 =$ [ ] teorema L4

↓

[ ] teorema L2

↓

[ ]



$\left(\lim_{x \to 2} x\right)^2$

2^2

4

79

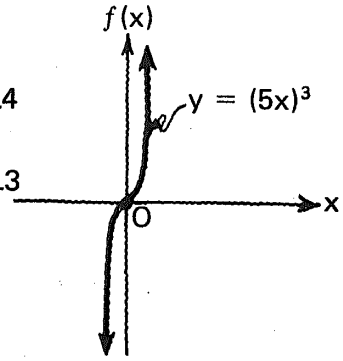
$\lim_{x \to 4} (5x)^3 =$ [ ] por teorema L4

↓

[ ] por teorema L3

↓

[ ]



$\left[\lim_{x \to 4} (5x)\right]^3$

$(20)^3$

8000

80

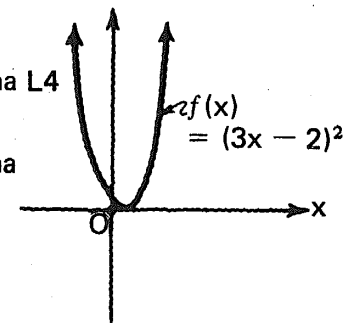
$\lim_{x \to -2} (3x - 2)^2 =$ [ ] por teorema L4

↓

[ ] por teorema

↓

[ ]



$\left[\lim_{x \to -2} (3x - 2)\right]^2$

$(-8)^2$ L3

64

7.2.4.1

Práctica adicional de determinación del límite de una función de la forma $y = [f(x)]^n$ siendo f una función constante o lineal, y $n \in \mathbb{Z}^+$, si se considera necesario.

81

Teorema L5. Límite de una suma de funciones.

$$\lim_{x\to a} [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x) = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x) \pm \ldots \pm \lim_{x\to a} f_n(x)$$

82

Calcular, para cualquier intervalo abierto que contenga a $x = 2$, ya que la función se define para toda $x \in \mathcal{R}$:

$\lim_{x\to 2} x^2 + 3x - 5 =$ [_____] por teorema L5

completar, indicando los teoremas utilizados.

alternativa → $\lim_{x\to 2} (3x - 5)$

- $\lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} 3x - \lim_{x\to 2} 5$ — TL4
- $\left(\lim_{x\to 2} x\right)^2 + \lim_{x\to 2} 3x - \lim_{x\to 2} 5$ — TL3, TL1
- $(2)^2 + 3 \cdot 2 - 5$ — TL2
- $4 + 6 - 5$
- **5**

7.2.4.2

Práctica adicional de determinación del límite de una suma de funciones que pueda ser calculado por los teoremas estudiados, si se considera necesario.

83

Teorema L6. Límite de un producto de funciones.

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim_{x\to a} f_2(x)\cdot\ldots\cdot\lim_{x\to a} f_n(x)$$

84

$\lim_{x\to 5} 3x^2 =$ [_____] por teorema L6

Completar, indicando los teoremas utilizados.

$\lim_{x\to 5} 3 \cdot \lim_{x\to 5} x^2$

$3 \cdot \left(\lim_{x\to 5} x\right)^2$ (TL1 y TL4)

$3 \cdot (5)^2$ (TL2)

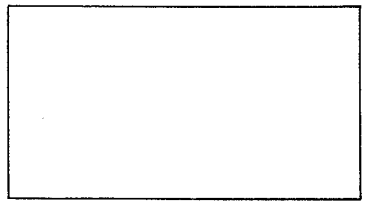
75

85

Calcular, para cualquier intervalo abierto que contenga a $x = -2$, ya que la función está definida para toda $x \in \mathbb{R}$:

$\lim_{x \to -2} (x - 2)(x^2 + 8) =$ [ ]

por teorema L6



$\lim_{x \to -2} (x - 2) \cdot \lim_{x \to -2} (x^2 + 8)$

$(-4) \cdot \left[\lim_{x \to -2} x^2 + \lim_{x \to -2} 8\right]$

(TL3 y TL5)

$(-4) \cdot (4 + 8)$

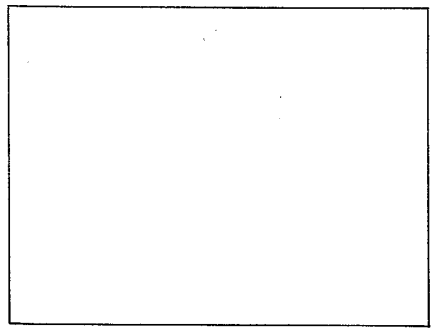
(TL4 y TL1)

$(-4)(12)$

-48

86

$\lim_{x \to -1} 3x^3 - 4x^2 =$ [ ]



[ ]

$\lim_{x \to -1} 3x^3 - \lim_{x \to -1} 4x^2$

$\left(\lim_{x \to -1} 3 \cdot \lim_{x \to -1} x^3\right)$

$-\left(\lim_{x \to -1} 4 \cdot \lim_{x \to -1} x^2\right)$

$3 \cdot \left(\lim_{x \to -1} x\right)^3 - 4 \cdot \left(\lim_{x \to -1} x\right)^2$

$3 \cdot (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2$

$3 \cdot (-1) - 4(1)$

$-3 - 4$

-7

7.2.4.3

Práctica adicional
si se considera necesario.

87

Teorema L7. Cociente de funciones.
Límite del denominador no nulo.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \text{ si } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

88

Calcular, para algún intervalo abierto para el cual se defina la función $\forall$ x, y que contenga a x = 3, por ejemplo: (1, + ∞):*

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = ? \qquad x \in \mathbb{R} \wedge \quad x \neq 1$$

Calculemos, por separado, el límite del numerador y el del denominador:

$\lim_{x\to 3} (x^2 + 3) =$ [ ]

$\lim_{x\to 3} (x - 1) =$ [ ]

* La función podría no estar definida para x = 3.

12

2

89

Como el límite del denominador es no nulo, es aplicable el teorema 7:

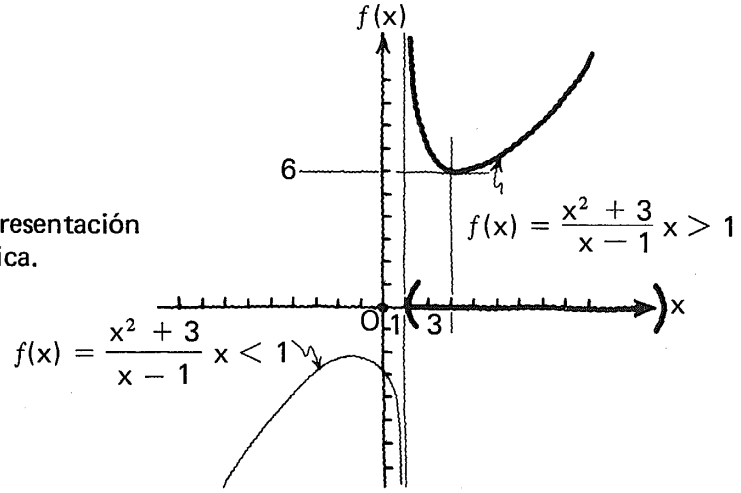
$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \frac{\lim_{x\to 3} (x^2 + 3)}{\lim_{x\to 3} (x - 1)} = \frac{\square}{\square}$$

$\frac{12}{2}$

6

90

Representación gráfica.



91

Calcular, para algún intervalo abierto en el cual se defina $1/x^3$ para toda x, y que contenga a $x = -2$, por ejemplo: $(-\infty, 0)$*

$\lim_{x \to -2} \frac{1}{x^3} = ?$

$\lim_{x \to -2} 1 =$ [1]

$\lim_{x \to -2} x^3 =$ [− 8]

* La función podría no estar definida para $x = -2$.

92

$\lim_{x \to -2} \frac{1}{x^3} = ?$

Como el límite del denominador **es/no es** no nulo **es/no es** aplicable el teorema 7.

es
es

93

$$\lim_{x \to -2} \frac{1}{x^3} = ?$$

$$\lim_{x \to -2} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to -2} x^3 = -8$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{1}{x^3} = \boxed{\quad}$$

$$\downarrow$$

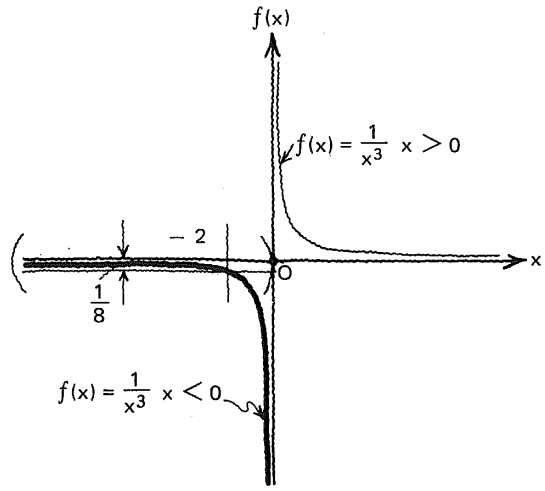
$$\boxed{\quad}$$

$\frac{1}{-8}$

$-\frac{1}{8}$

94

Representación gráfica.



95

Calcular, para cualquier intervalo abierto que contenga a $x = 2$, puesto que $(x - 2)/x^2 + 1$ está definida $\forall\, x \in \mathcal{R}$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 + 1} = ?$$

$$\lim_{x \to 2} (x - 2) = \boxed{\quad}$$

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 1) = \boxed{\quad}$$

0

5

96

Es/no es aplicable al teorema 7, porque

[ ]

Es

el límite del denominador es no nulo.

97

$\lim_{x \to 2} (x - 2) = 0$

$\lim_{x \to 2} (x^2 + 1) = 5$

$\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 + 1} =$ [ ]

↓

[ ]

$\frac{0}{5}$

0

98

Calcular, para algún intervalo abierto para el cual se defina $(x^2 - 1)/x - 1$ para toda x (con la posible excepción de $x = 1$), y que contenga a $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = ?$$

$\lim_{x \to 1} (x^2 - 1) =$ [ ]

$\lim_{x \to 1} (x - 1) =$ [ ]

0

0

99

Es/no es aplicable el teorema 7
para determinar el valor de:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

porque [_____]

no es

el límite del denominador es nulo

100

Observamos que,
en este caso:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = ?$$

- el límite del denominador es nulo,
  y
- el límite del numerador es también nulo

$$\lim_{x \to 1} (x^2 - 1) = 0$$

$$\lim_{x \to 1} (x - 1) = 0$$

101

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = ?$$

La **expresión** $\frac{0}{0}$ que resulta de aplicar el teorema L7
es **indeterminada,**

ya que es equivalente a cualquier número.

$\forall\ a \in \mathcal{R}$:

$\frac{0}{0} = a$ ya que $a \cdot 0 = 0$

102

Más adelante estudiaremos la manera de calcular

$$\bullet \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

cuando
- $\lim_{x \to a} f(x) = 0$
- $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

103

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x}{x^2 - 4} = ?$$

Para algún intervalo abierto que contenga a $x = 2$ y en el cual se defina la función para toda x (con la posible excepción de $x = 2$).

Calculamos por separado los límites del numerador y del denominador.

$\lim_{x \to 2} 3x = 6$

$\lim_{x \to 2} (x^2 - 4) = 0$

104

Es/no es aplicable el teorema L7 para determinar

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x}{x^2 - 4}$$

porque

no es

el límite del denominador es nulo

105

Dejaremos, también, para después
la evaluación de límites de la forma $\bullet \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

cuando $\begin{cases} \bullet \lim_{x \to a} f(x) \neq 0 \\ \bullet \lim_{x \to a} g(x) = 0 \end{cases}$

7.2.4.4

Práctica adicional de evaluación
de límites de la forma

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

mediante la aplicación del teorema
L7, identificando los casos en que
no es aplicable dicho teorema,
si se considera necesario

106

Estudiar con atención.

Teorema L8. Límite de una raíz n-ésima.

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

si $\sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} \in \mathcal{R}$

107

Se requiere evaluar para el intervalo $(-\infty, +\infty)$:

$$\lim_{x \to 5} \sqrt{x^2 + 1}$$

Empezamos preguntándonos:

¿Está $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ definida para toda $x \in \mathbb{R}$?

Sí/No

porque

Sí

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \in \mathbb{R} \wedge x^2 \geqslant 0$
$x^2 \geqslant 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 0$
$x^2 + 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} \in \mathbb{R}$

108

La expresión $\lim_{x \to 5} \sqrt{x^2 + 1}$

tiene sentido para el intervalo $(-\infty, +\infty)$,

puesto que $\sqrt{x^2 + 1}$ está definida para toda $x \in (-\infty, +\infty)$.

109

Calculemos, entonces.

$\lim_{x \to 5} \sqrt{x^2 + 1} =$ [ ] por teorema L8

$\sqrt{\lim_{x \to 5} (x^2 + 1)}$

$\sqrt{\lim_{x \to 5} x^2 + \lim_{x \to 5} 1}$

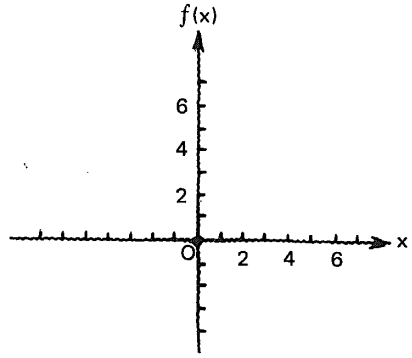
$\sqrt{\left(\lim_{x \to 5} x\right)^2 + 1}$

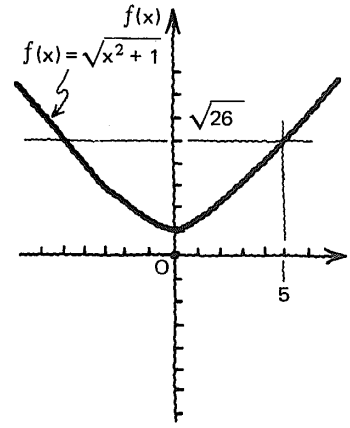
$\sqrt{(5)^2 + 1}$

$\sqrt{26}$

110

Representación gráfica.





111

Calcular

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{1}{3x^2 + 2}}$$

¿Está $f(x) = \sqrt{\frac{1}{3x^2 + 2}}$ definida para toda $x \in \mathbb{R}$?

Sí/No

Porque

Sí

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow 3x^2 + 2 \in \mathbb{R} \wedge x > 0$

$3x^2 + 2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{3x^2 + 2} > 0$

$\frac{1}{3x^2 + 2} > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{3x^2 + 2}} \in \mathbb{R}$

112

$\lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{1}{3x^2 + 2}} =$ por teorema 8

$\sqrt{\lim_{x \to 0} \frac{1}{3x^2 + 2}}$

$\sqrt{\frac{1}{\lim_{x \to 0} 3x^2 + \lim_{x \to 0} 2}}$

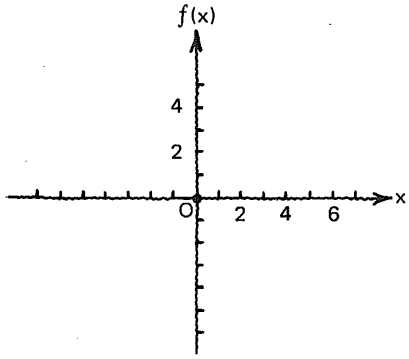
$\sqrt{\frac{1}{3 \cdot \left(\lim_{x \to 0} x\right)^2 + 2}}$

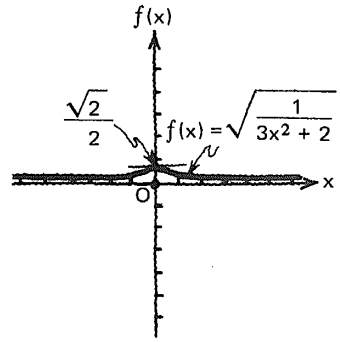
$\sqrt{\frac{1}{3 \cdot (0)^2 + 2}}$

$\sqrt{\frac{1}{2}}$ o bien $\frac{\sqrt{2}}{2}$

113

Representación gráfica.





114

Calcular

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{16 - x^2}$$

¿Está $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ definida para toda $x \in \mathbb{R}$?

Sí/No

Porque

- No

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant 0$

$x^2 \geqslant 0 \Rightarrow 16 - x^2$ puede ser positivo, negativo o cero

$16 - x^2 \geqslant 0 \Rightarrow \sqrt{16 - x^2} \in \mathbb{R}$

pero

$16 - x^2 < 0 \Rightarrow \sqrt{16 - x^2} \notin \mathbb{R}$

115

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{16 - x^2}$$

El dominio de

$f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

es el intervalo

$\sqrt{16 - x^2} \in \mathbb{R}$ si $16 - x^2 \geqslant 0$

Resolvemos entonces:

$$16 - x^2 \geqslant 0$$

$$(4 + x) \qquad (4 - x) \geqslant 0$$

$4 + x \geqslant 0$ $\quad$ $4 + x \leqslant 0$

$x \geqslant -4$ $\quad$ $x \leqslant -4$

$4 - x \geqslant 0$ $\quad$ $4 - x \leqslant 0$

$-x \geqslant -4$ $\quad$ $-x \leqslant -4$

$x \leqslant 4$ $\quad$ $x \geqslant 4$

$S_1 = [-4, 4]$ $\quad$ $S_2 = [\ ]$

$S = S_1 \cup S_2 = [-4, 4]$

- $[-4, 4]$

116

La expresión $\lim_{x \to 3} \sqrt{16 - x^2}$

tendrá sentido para cualquier intervalo abierto I tal que:

$3 \in I \wedge I \subseteq (-4, 4)$.

117

Teniendo en cuenta las restricciones mencionadas,

$\lim_{x \to 3} \sqrt{16 - x^2} =$ [ ] Por teorema 8

↓

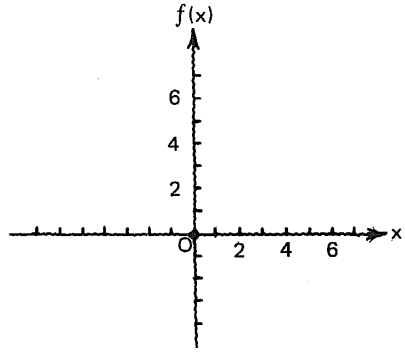
[ ]

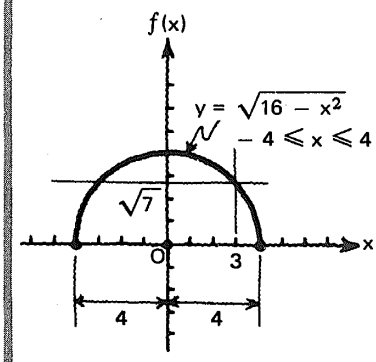
$\sqrt{\lim_{x \to 3} (16 - x^2)}$

$\sqrt{7}$

118

Representación gráfica.





119

Atención.

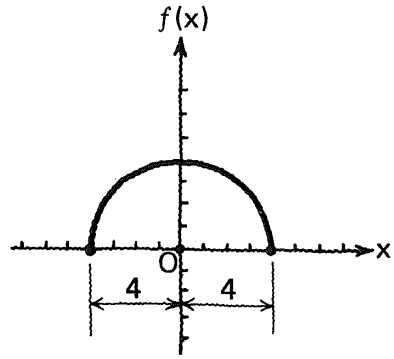
Sigamos considerando la función

$f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

$-4 \leqslant x \leqslant 4$

pero
ahora necesitamos:

$\lim_{x \to 4} \sqrt{16 - x^2}$

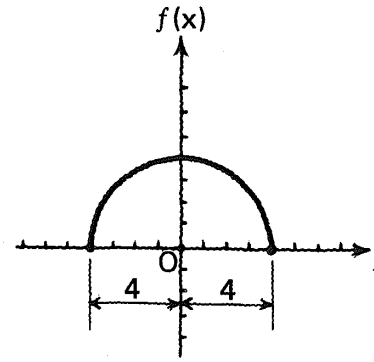


120

La expresión

$\lim_{x \to 4} \sqrt{16 - x^2}$

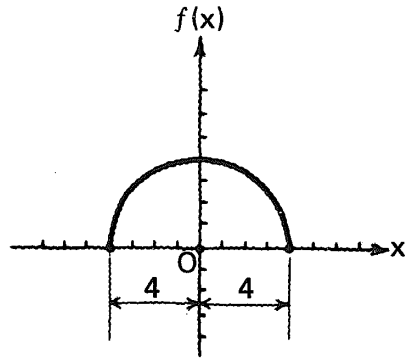
carece de sentido, de acuerdo con nuestra definición, puesto que ningún intervalo I tal que $I \subseteq (-4, 4)$ contiene a 4.



121

Vistas las cosas de otra manera:

podemos acercarnos a 4, **por la izquierda**, es decir, a través de valores de x menores que 4, pero **no por la derecha** pues la función no está definida para valores de x mayores que 4.



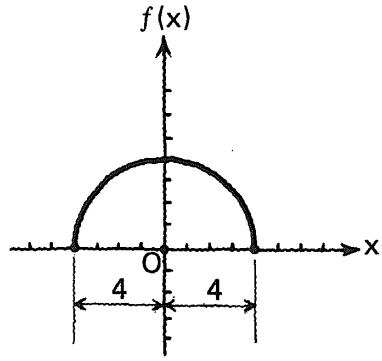
122

De manera similar,
la expresión

$$\lim_{x \to \square} \sqrt{16 - x^2}$$

carece de sentido.

Podemos acercarnos a ☐
por la derecha,
pero
no por la izquierda,
pues la función no está
definida para valores de
x, menores de ☐



— 4

— 4

— 4

123

Posteriormente resolveremos
esta dificultad, definiendo
límites por la derecha
o
por la izquierda.

7.2.4.5

Práctica adicional de
evaluación de límites
de la forma

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)}$$

mediante la aplicación
del teorema L8, identificando
los casos en que el límite
no está definido,
si se considera necesario.

Resumen de los teoremas de límites estudiados hasta este momento.

TL1. $\lim_{x \to a} c = c$

TL2. $\lim_{x \to a} x = a$

TL3. $\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$

TL4. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x) \right]^n$

TL5. $\lim_{x \to a} [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x) = \lim_{x \to a} f_1(x) \pm \lim_{x \to a} f_2(x) \pm \ldots \pm \lim_{x \to a} f_n(x)$

TL6. $\lim_{x \to a} [f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)] = \lim_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim_{x \to a} f_2(x) \cdot \ldots \cdot \lim_{x \to a} f_n(x)$

TL7. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

TL8. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ si $\sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} \in \mathbb{R}$

7.2.4.6

Práctica adicional de evaluación de límites mediante la aplicación de los teoremas L1 a L8, si se considera necesario.

7.2.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* el límite de una función de la forma $y = [f(x)]^n$ con $n \in \mathbb{Z}^+$ mediante la aplicación del teorema L4;
- *determinar* el límite de una suma de funciones;
- *determinar* el límite de un producto de funciones o de una suma de productos de funciones;
- *determinar* el límite de un cociente de funciones, mediante la aplicación del teorema 7, identificando los casos en que no es aplicable dicho teorema;
- *determinar* el límite de la raíz n-ésima de una función, mediante la aplicación del teorema L8, identificando los casos en que el límite no está definido;
- *explicar* con sus propias palabras y valiéndose de los elementos visuales necesarios, el porqué de la necesidad de definir límites por la derecha y por la izquierda.

2.5

Límite de un cociente de funciones cuando los límites del numerador y del denominador son ambos nulos

125

Habíamos dejado pendiente la evaluación de

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

en que

$$\lim_{x \to 1} (x^2 - 1) = 0$$

y

$$\lim_{x \to 1} (x - 1) = 0$$

126

puesto que $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 1) = 0 \\ \text{y} \\ \lim\limits_{x \to 1} (x - 1) = 0 \end{cases}$

podemos escribir $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \dfrac{0}{0}$

expresión equivalente a cualquier número real.

$\dfrac{0}{0} = a$ ya que $0 \cdot a = 0 \; \forall a \in \mathbb{R}$.

127

Podemos "hacer desaparecer la indeterminación" de la expresión si la transformamos como sigue:

Expresión original $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

↓

Factorizando el numerador: [ ]

$\dfrac{(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)}$

128

$\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

↓

$\dfrac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1}$

↓

Si suponemos que $x \neq 1$, podemos dividir los dos términos de la expresión entre $x - 1$, con lo que obtenemos: [ ]

$x + 1$

129

Ahora, observemos con atención que:

- las dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen igual valor para cualquier valor de x, con excepción de $x = 1$.

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

↓

$g(x) = x + 1$

Para $x = 1$ { $f(x)$ no está definida; $g(x) =$ [ ] }

2

130

Si eliminamos a $x = 1$ del dominio de $g(x)$ logramos que las dos funciones sean equivalentes.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad x \neq 1$$

$$\downarrow$$

$$g(x) = x + 1 \quad x \neq 1$$

131

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad x \neq 1 \longrightarrow g(x) = x + 1 \quad x \neq 1$$

Ahora bien, sabemos que:

$\lim_{x \to 1} (x + 1) =$ [ ]

Esté o no definida $g(x)$ para $x = 1$.

2

132

Estudiemos con atención este esquema.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad x \neq 1 \longrightarrow g(x) = x + 1 \quad x \neq 1$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 \longleftarrow \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

133

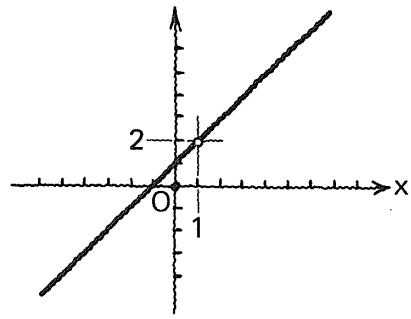
La gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

es igual a la gráfica de

$g(x) = x + 1$

con el punto (1, 2) excluido.



Podemos observar que:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x)$$

134

Lo anterior nos lleva al establecimiento del **Teorema L9**, que aceptaremos sin demostración.

Si $f(x) = g(x)$ para toda $x \neq a$

y $\lim_{x \to a} g(x) = L$

entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

135

Se requiere evaluar:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$$

Buscamos por separado los límites del numerador y del denominador:

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 3x - 10) = 0$$

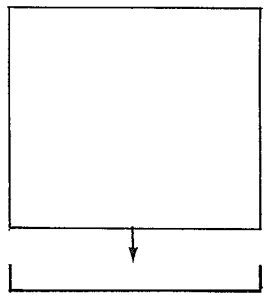
$$\lim_{x \to 2} (x - 2) = 0$$

136

Debemos transformar la expresión

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$$

en otra que se defina para $x = 2$



Factorizando el numerador:

$$\frac{(x + 5)(x - 2)}{x - 2}$$

$x + 5$

137

Completemos el esquema.

$\frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$ $x \neq$ ⌊___⌋ → $x + 5$ $x \neq$ ⌊___⌋

↓ ↓

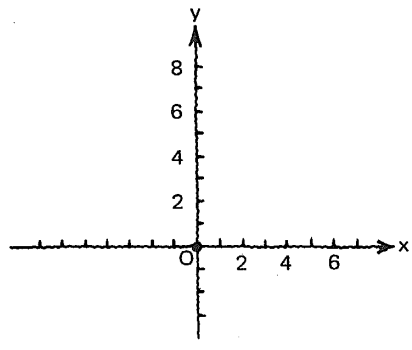
$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} =$ ⌊___⌋ ← $\lim_{x \to 2} (x + 5) =$ ⌊___⌋

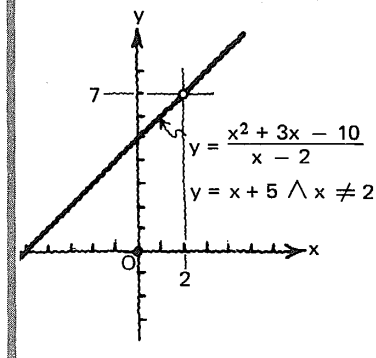
2 2

7 7

138

Representación gráfica.





139

Otro ejemplo:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = ?$$

Límite del numerador ⌊_____⌋

Límite del denominador ⌊_____⌋

$\lim_{x \to -2} (x^3 + 8) = 0$

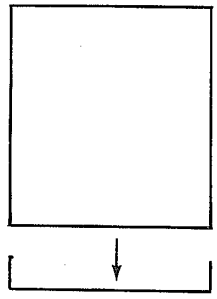
$\lim_{x \to -2} (x + 2) = 0$

140

Necesitamos transformar la expresión

$$\frac{x^3 + 8}{x + 2}$$

en otra que se defina para x = ⌊___⌋



-2

Factorizando el numerador

$$\frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{x + 2}$$

$x^2 - 2x + 4$

141

Completemos.

$\frac{x^3 + 8}{x + 2}$ $x \neq$ ⌊___⌋

$x^2 - 2x + 4$ ⌊___⌋

⌊_____⌋

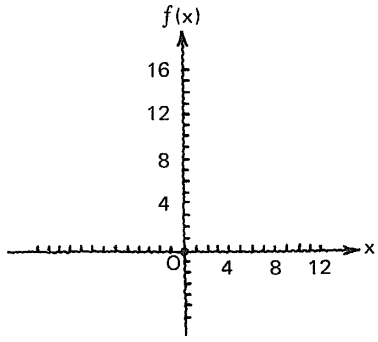
$\lim_{x \to -2} (x^2 - 2x + 4) =$ ⌊___⌋

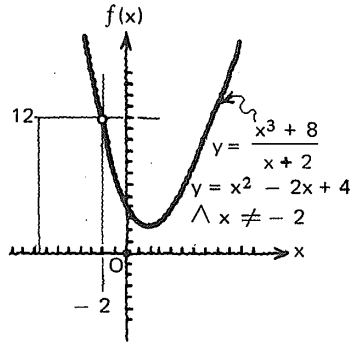
● -2 ● $x \neq -2$

● $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = 12$ ● 12

142

Representación gráfica.





143

Un ejemplo más:

$$\lim_{x \to 2/3} \frac{6x^2 - 7x + 2}{3x - 2} = ?$$

límite del numerador

límite del denominador

$\lim_{x \to 2/3} (6x^2 - 7x + 2) = 0$

$\lim_{x \to 2/3} (3x - 2) = 0$

144

Transformación de la expresión

$$\frac{6x^2 - 7x + 2}{3x - 2}$$

en otra que se defina para $x = \frac{2}{3}$.

Factorizando el numerador:

$$\frac{(3x - 2)(2x - 1)}{3x - 2}$$

$$2x - 1$$

145

Función original:

$$\frac{6x^2 - 7x + 2}{3x - 2} \quad x \neq \frac{2}{3}$$

Función equivalente:

$$2x - 1 \quad x \neq 2/3$$

Límite de la función original:

$$\lim_{x \to 2/3} \frac{6x^2 - 7x + 2}{3x - 2} = \square$$

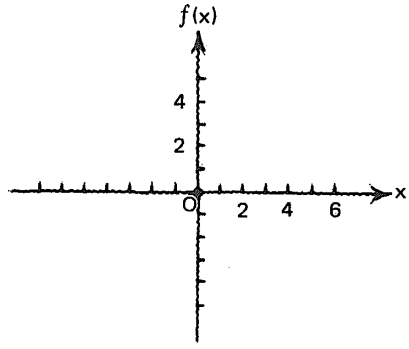
Límite de la función equivalente:

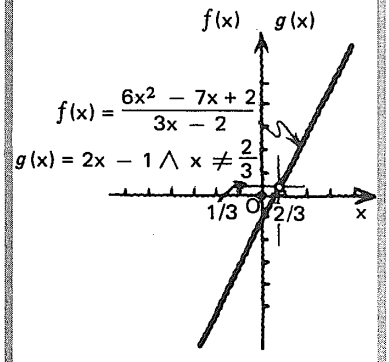
$$\lim_{x \to 2/3} (2x - 1) = \square$$

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$

146

Representación gráfica.





147

Evaluemos:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}$$

límite del numerador $\square$

límite del denominador $\square$

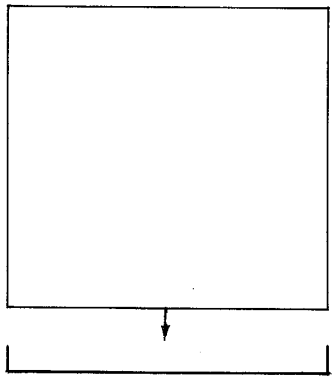
$$\lim_{h \to 0} \left(\sqrt{x + h} - \sqrt{x}\right) = 0$$

$$\lim_{h \to 0} h = 0$$

148

Intentemos transformar la expresión dada, en otra que se defina para $h = 0$,

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$



Atención.

Racionalizando el numerador:

$$\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

149

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \quad h \neq 0 \qquad \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \quad h \neq 0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \underline{\quad} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \underline{\quad}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

7.2.5.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.

7.2.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* el límite de un cociente de funciones, cuando los límites del numerador y del denominador son ambos nulos, mediante la aplicación del teorema L9.

2.6

Límites unilaterales

15

Habíamos dejado inconclusa, en un submódulo anterior, la evaluación de

$$\lim_{x \to 4} \sqrt{16 - x^2}$$

y de

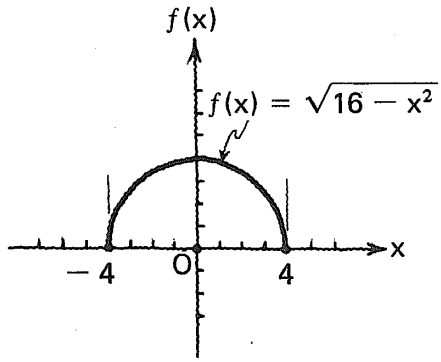
$$\lim_{x \to -4} \sqrt{16 - x^2}$$

151

Observábamos que:

$\lim_{x \to 4} \sqrt{16 - x^2}$

no se define, porque no podemos acercarnos a 4 a través de valores de x mayores que dicho número.



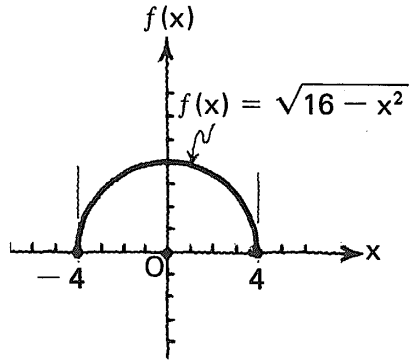
152

En otras palabras:

no existe ningún intervalo abierto en que esté definida la función para toda x, y que contenga a 4.

Por ejemplo:

el intervalo $(-4, 4)$ no contiene a 4.



153

Aceptaremos entonces, la existencia del **límite de una función** f **cuando x tiende a** a **por la izquierda,** que simbolizaremos así:

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

154

Estudiar con mucha atención.

Definición. Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

si para cualquier $\epsilon > 0$ tan pequeña como queramos existe una $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon \text{ siempre que } -\delta < x - a < 0^*$$

f es una función definida para toda x de algún intervalo abierto (b, a).

* Véase cuadro siguiente.

155

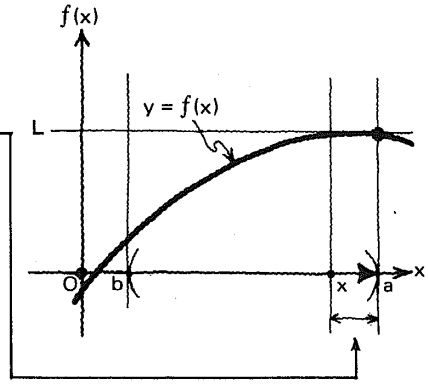
Tomemos nota de esto.

$f(a)$ puede estar o no definida.

Siendo $x < a$ $x - a$ es siempre negativo, por lo que podemos escribir:

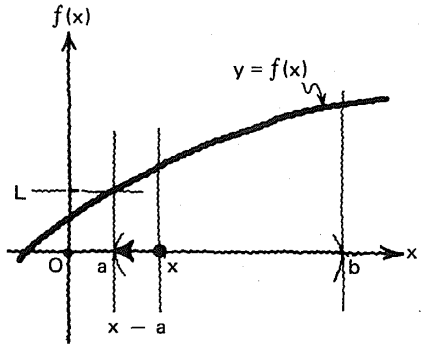
$$-\delta < x - a < 0$$

en la expresión definitoria de $\lim_{x \to a^-} f(x)$.



156

Intentemos definir, de manera similar, el **límite por la derecha.**



Respuesta en el cuadro siguiente

Definición. Límite por la derecha:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si para cualquier $\epsilon > 0$ tan pequeña como queramos existe una $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < x - a < \delta^*$$

f es una función definida para toda x de algún intervalo abierto (a, b).

* $x - a$ es siempre positivo, puesto que $x > a$, como puede verse en la figura del cuadro anterior.

157

- $\lim_{x \to a^+} f(x)$

y

- $\lim_{x \to a^-} f(x)$

serán llamados

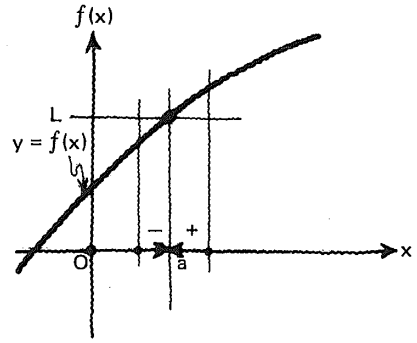
límites unilaterales,

y a

- $\lim_{x \to a} f(x)$

le llamaremos

límite bilateral.



158

Convendremos en aceptar que:

$\lim_{x \to a} f(x)$

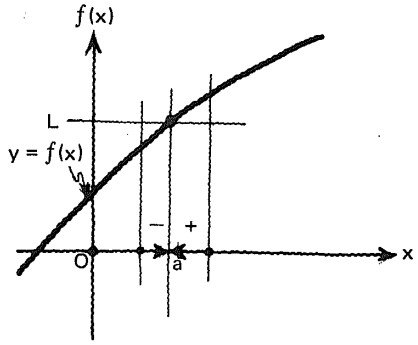
existe y es igual a L,
si y sólo si

$\lim_{x \to a^+} f(x)$

y

$\lim_{x \to a^-} f(x)$

existen y son
iguales a L.



159

Regresemos a la función definida por

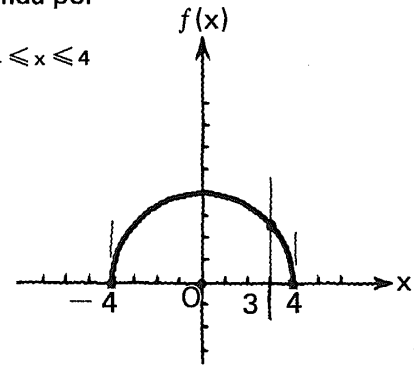
$$f(x) = \sqrt{16 - x^2} \quad -4 \leqslant x \leqslant 4$$

cuya gráfica se muestra.

$\lim_{x \to 3^-} \sqrt{16 - x^2} =$ ⌊_____⌋

$\lim_{x \to 3^+} \sqrt{16 - x^2} =$ ⌊_____⌋

$\lim_{x \to 3} \sqrt{16 - x^2} =$ ⌊_____⌋



$\sqrt{7}$

$\sqrt{7}$

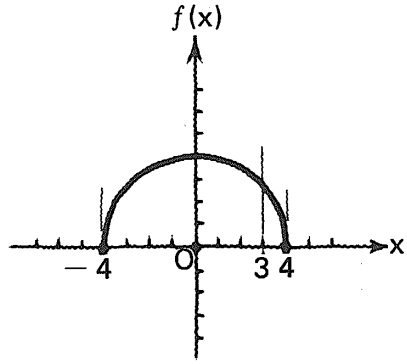
$\sqrt{7}$

160

$\lim_{x \to 4^-} \sqrt{16 - x^2} =$ ____

$\lim_{x \to 4^+} \sqrt{16 - x^2} =$ ____

$\lim_{x \to 4} \sqrt{16 - x^2} =$ ____



0

no está definido

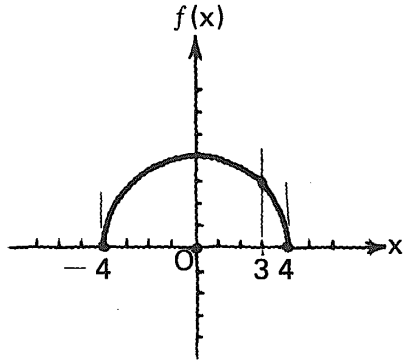
no está definido
(de acuerdo con lo convenido)

161

$\lim_{x \to -4^-} \sqrt{16 - x^2} =$ ____

$\lim_{x \to -4^+} \sqrt{16 - x^2} =$ ____

$\lim_{x \to -4} \sqrt{16 - x^2} =$ ____



no está definido

0

no está definido
(de acuerdo con lo convenido)

162

Consideremos la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{36 - 4(x-1)^2}}{3}$$

definida en el intervalo

____

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Para que $f(x)$ esté definida en $\mathbb{R}$ se requiere que:

$$36 - 4(x-1)^2 \geqslant 0$$

o bien, factorizando:

$$[6 + 2(x-1)][6 - 2(x-1)] \geqslant 0$$

$6 + 2(x-1) \geqslant 0$

$2(x-1) \geqslant -6$

$x - 1 \geqslant -3$

$x \geqslant -2$

$6 + 2(x-1) \leqslant 0$

$2(x-1) \leqslant -6$

$x - 1 \leqslant -3$

$x \leqslant -2$

$6 - 2(x-1) \geqslant 0$

$-2(x-1) \geqslant -6$

$x - 1 \leqslant 3$

$x \leqslant 4$

$S_1 = [-2, 4]$

$6 - 2(x-1) \leqslant 0$

$-2(x-1) \leqslant -6$

$x - 1 \geqslant 3$

$x \geqslant 4$

$S_2 = [\ ]$

$$S = S_1 \cup S_2 = [-2, 4]$$

$$[-2, 4]$$

163

$$f(x) = \frac{\sqrt{36 - 4(x-1)^2}}{3} \qquad -2 \leqslant x \leqslant 4$$

Ahora bien:

$\lim_{x \to 1^-} f(x) =$ [_____] 2

$\lim_{x \to 1^+} f(x) =$ [_____] 2

$\lim_{x \to 1} f(x) =$ [_____] 2

164

$$f(x) = \frac{\sqrt{36 - 4(x - 1)^2}}{3} \qquad -2 \leqslant x \leqslant 4$$

$\lim_{x \to 4^-} f(x) =$ [ ]

$\lim_{x \to 4^+} f(x) =$ [ ]

$\lim_{x \to 4} f(x) =$ [ ]

0

no está definido

no está definido (de acuerdo con lo convenido)

165

$$f(x) = \frac{\sqrt{36 - 4(x - 1)^2}}{3} \qquad -2 \leqslant x \leqslant 4$$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) =$ [ ]

$\lim_{x \to -2^+} f(x) =$ [ ]

$\lim_{x \to -2} f(x) =$ [ ]

no está definido

0

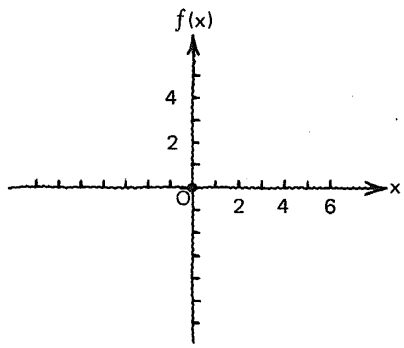
no está definido (de acuerdo con nuestro convenio)

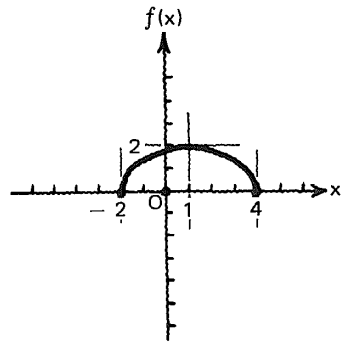
166

Representación gráfica.

$$f(x) = \frac{\sqrt{36 - 4(x - 1)^2}}{3}$$

$-2 \leqslant x \leqslant 4$





167

Atención.

Consideremos la función definida, así:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ \dfrac{16 - (x-2)^2}{4} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) =$ [ ]

4

168

La misma función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ \dfrac{16 - (x-2)^2}{4} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) =$ [ ]

4

169

La misma función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ \dfrac{16 - (x-2)^2}{4} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

puesto que

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$$

y

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$$

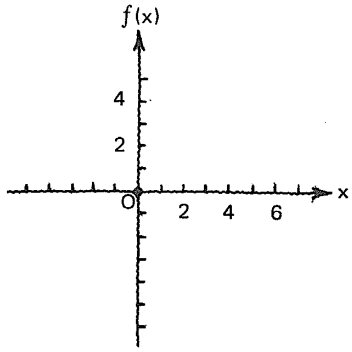
podemos escribir

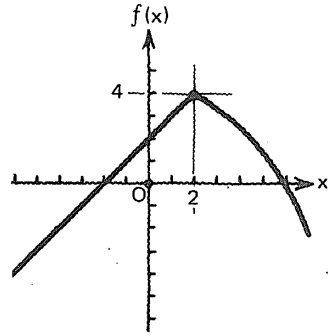
$\lim_{x \to 2} f(x) =$ [ ]

4

Representación gráfica.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 \text{ si } x \geqslant 2 \\ \dfrac{16 - (x-2)^2}{4} \text{ si } x > 2 \end{cases}$$





7.2.6.1

Práctica adicional de determinación de los límites unilaterales y del límite bilateral para una función dada, si se considera necesario.

7.2.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* los límites unilaterales (por la derecha y por la izquierda) de una función dada y el límite bilateral, en el caso de que éste exista.

2.7

Límites al infinito

171

Consideremos la función definida por:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1}.$$

Queremos conocer el límite de $f(x)$,
si es que existe,
cuando x "crece sin límite".
Esto lo simbolizamos así:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

172

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} = ? \qquad x \notin \{-1, 1\}$$

Asignemos a x valores cada vez más grandes ($x > 1$) y observemos el comportamiento de $f(x)$:

$x \to$	10	100	1000	$\longrightarrow$
$f(x) \to$				

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} = ?$$

$x \to$	10	100	1000
$f(x) \to$	33.444	3.0004	3.000004

A medida que x crece sin límite
$f(x)$ parece aproximarse a [ ]

3

173

$$f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Ahora, queremos el límite de $f(x)$
cuando x "decrece sin límite".
Simbólicamente:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

174

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} = ? \qquad x \notin \{-1, 1\}$$

Asignemos a x valores cada vez
menores ($x < -1$) y observemos
el comportamiento de la función:

	-1000	-100	-10	$\leftarrow x$
$\leftarrow$				$\leftarrow f(x)$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} = \ ?$$

←	− 1000	− 100	− 10	←x
	3.000004	3.0004	33.444	←$f(x)$

Observamos que a medida que x
"crece sin límite"
$f(x)$ [_____]

describir el comportamiento de $f(x)$.

parece acercarse a 3
como límite

175

Estudiar con atención este cuadro y el siguiente.

Definición. Límite al infinito positivo.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

si para cualquier $\epsilon > 0$ tan pequeña como queramos,
existe una $N > 0$
tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon \text{ siempre que } x > N$$

f es una función definida para toda x
de algún intervalo $(a, +\infty)$.

176

Definición. Límite al infinito negativo.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

si para cualquier $\epsilon > 0$ tan pequeña como queramos,
existe una $N < 0$
tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon \text{ siempre que } x < N$$

f es una función definida para toda x
de algún intervalo $(-\infty, a)$.

177

Los dos teoremas siguientes nos ayudarán a evaluar los límites al infinito.

Teorema L10: Límite al infinito positivo.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

Teorema L11: Límite al infinito negativo.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

Con fines nemotécnicos, podemos escribir: $\frac{1}{\infty} = 0$.

178

Los teoremas L1 a L8 seguirán siendo válidos si a se sustituye por $+\infty$ o por $-\infty$.

$\lim_{x \to a} f(x)$

$+\infty$ $\quad$ $-\infty$

179

Vamos, ahora, a evaluar este límite que habíamos ya considerado, mediante la aplicación del teorema L10.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

180

Para poder aplicar el teorema L10, dividimos el numerador y el denominador de la expresión

$$\frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

entre x^2, con lo que obtenemos [ ]

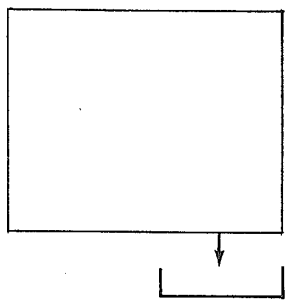
$$\frac{3 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

181

Entonces,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

Completar la evaluación.



[ ]

☞ Estudiar con mucha atención.

$$\frac{\lim_{x \to +\infty} 3 + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \to +\infty} 1 - \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}}$$

$$\frac{3 + 0}{1 - 0}$$

3 tal como habíamos previamente conjeturado.

182

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} = ?$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} = [\quad]$$

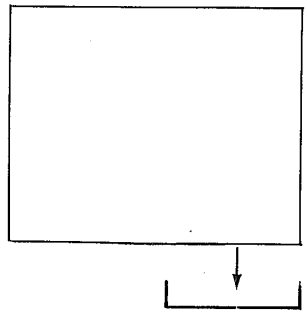
Dividiendo numerador y denominador entre x^2.

$$\frac{3 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

183

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}$$

Completar la evaluación.



$$\frac{\lim_{x\to-\infty} 3 + \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x\to-\infty} 1 - \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}}$$

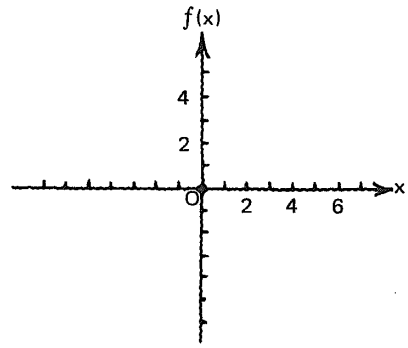
$$\frac{3+0}{1-0}$$

3 como también habíamos supuesto

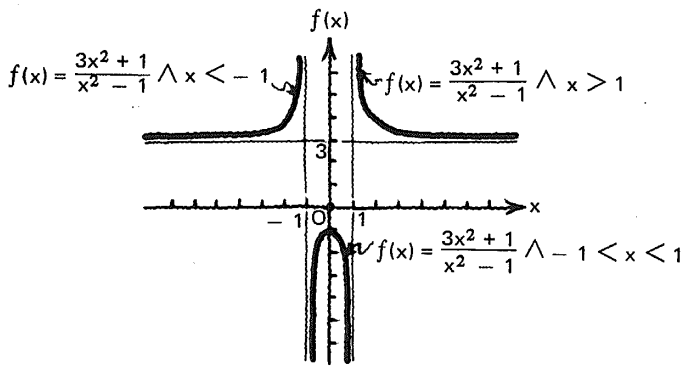
184

Hagamos la representación gráfica de la función

$$f(x) = \frac{3x^2+1}{x^2-1}$$



Respuesta en el cuadro siguiente



185

En la gráfica del cuadro anterior podemos observar que:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} = 3$ tiene sentido en el intervalo $(1, +\infty)$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} = 3$ tiene sentido en el intervalo [_____]

$(-\infty \ -1)$

186

Se requiere, ahora, determinar $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x + 3}{3x - 1}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x + 3}{3x - 1} = \lim_{x \to +\infty}$ [_____]

Expresión transformada que permita la aplicación del teorema L10.

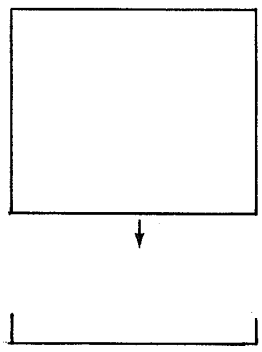
Dividiendo numerador y denominador entre x.

$$\frac{2 + \frac{3}{x}}{3 - \frac{1}{x}}$$

187

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x + 3}{3x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{3 - \frac{1}{x}}$$

Completar la evaluación.



[_____]

$$\frac{\lim_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{3}{x}\right)}{\lim_{x \to +\infty} \left(3 - \frac{1}{x}\right)}$$

$$\frac{\lim_{x \to +\infty} 2 + \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x}}{\lim_{x \to +\infty} 3 - \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}}$$

$$\frac{2 + \lim_{x \to +\infty} 3 \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}}{3 - 0}$$

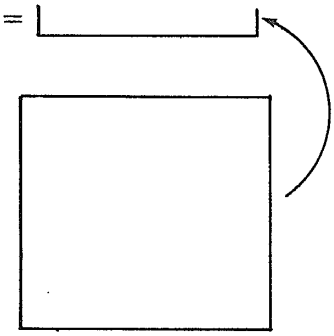
$$\frac{2 + 3 \cdot 0}{3 - 0}$$

$$\frac{2}{3}$$

188

Evaluar:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 + 5}{x^2 + 2x} =$$



4

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 + 5}{x^2 + 2x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4 + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}}$$

$$= \frac{4 + 0}{1 + 0} = 4$$

7.2.7.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.

7.2.7

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* el límite de una función dada, de la forma:

  $$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

  en que $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios en x y x crece o decrece sin límite.

2.8

Límites infinitos

189

Se tiene la función ➡ $f(x) = \dfrac{4}{x-2}$

definida para ➡ [ ]

toda $x \in \mathcal{R}$, excepto para $x = 2$
o bien, para:
$(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

190

Queremos conocer:

$$\lim_{x \to 2} \frac{4}{x-2}$$

Aproximémonos a 2 a través de valores de x menores que 2, o sea por la [ ] y observemos el comportamiento de $f(x)$.

Véase cuadro siguiente.

izquierda

191

$$\lim_{x \to 2} \frac{4}{x - 2} = ?$$

$x \to$	1.9	1.99	1.999	1.9999
$f(x) \to$				

Completemos la tabla y anotemos nuestras observaciones en relación con el comportamiento de $f(x)$:

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\lim_{x \to 2} \frac{4}{x - 2} = ?$$

$x \to$	1.9	1.99	1.999	1.9999
$f(x) \to$	− 40	− 400	− 4000	− 40000

Vemos que, a medida que x se aproxima a 2 por la izquierda, $f(x)$ decrece sin límite, o bien, simbólicamente:

$f(x) \to -\infty$.

192

Podemos escribir:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{4}{x - 2} =$$

$-\infty$

193

$$\lim_{x \to 2} \frac{4}{x - 2} = ?$$

Acerquémonos, ahora, a 2 por la derecha y observemos el comportamiento de $f(x)$:

←	2.0001	2.001	2.01	2.1	←x
					←$f(x)$

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\lim_{x \to 2} \frac{4}{x - 2} = ?$$

←	2.0001	2.001	2.01	2.1	←x
	40000	4000	400	40	←$f(x)$

A medida que x se acerca a 2, por la derecha, $f(x)$ [_____]

crece sin límite
o simbólicamente:

$f(x) \to +\infty$

194

Escribimos: [_____]

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{4}{x - 2} = +\infty$$

195

Atención.

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{4}{x-2} = -\infty$$

y

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{4}{x-2} = +\infty$$

Se acostumbra simbolizar esta situación en la siguiente forma:

$$\lim_{x \to 2} \frac{4}{x-2} = \infty$$ "infinito sin signo"

196

Estudiar con atención.

En general:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

deberá interpretarse como

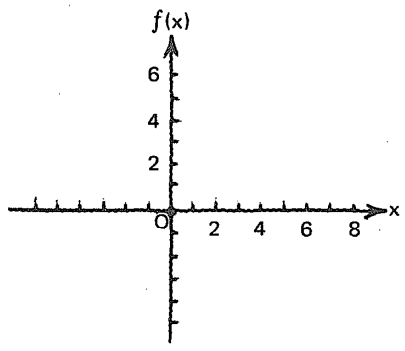
$$\lim_{x \to a} |f(x)| = +\infty$$

197

Veamos en forma gráfica lo estudiado en los cuadros anteriores, trazando la curva correspondiente a

$$f(x) = \frac{4}{x-2}$$

y observándola cuidadosamente.

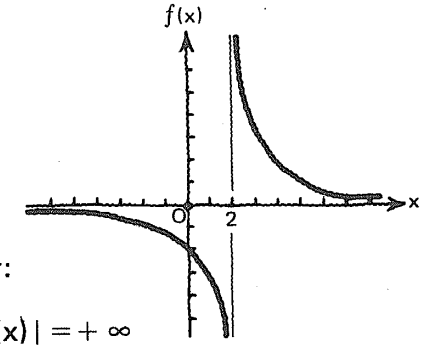


Respuesta en el cuadro siguiente.

$$f(x) = \frac{4}{x-2}$$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$



por lo tanto podemos escribir:

$\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$ o bien: $\lim_{x\to 2} |f(x)| = +\infty$

198

Se requiere evaluar $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$

Acerquémonos a 0, por la izquierda,
es decir, a través de **valores negativos de x:**

$x\to$				
$f(x)\to$				

y por la derecha, es decir, a través **de valores positivos de x:**

				$\leftarrow x$
				$\leftarrow f(x)$

y observemos el comportamiento de $f(x) = \frac{1}{x}$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Por ejemplo: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = ?$

$x\to 0$ a través de valores negativos:

$x\to$	-1	-0.1	-0.01	-0.001
$f(x)\to$	-1	-10	-100	-1000

$f(x)\to$ ⌊____⌋ o bien $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} =$ ⌊____⌋

$x\to 0$ a través de valores positivos:

	0.001	0.01	0.1	1	$\leftarrow x$
	1000	100	10	1	$\leftarrow f(x)$

$f(x)\to$ ⌊____⌋ o bien $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} =$ ⌊____⌋

$-\infty$ $-\infty$

$+\infty$ $+\infty$

199

Si $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

y $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

entonces

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} =$ [ ]

∞

200

Investiguemos, en la misma forma $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = ?$

$x \to 0$ por la izquierda (a través de valores negativos):

$x\to$				
$f(x)\to$				

$f(x) \to$ [ ] es decir: $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} =$ [ ]

$x \to 0$ por la derecha (a través de valores positivos):

					$\leftarrow x$
					$\leftarrow f(x)$

$f(x) \to$ [ ] es decir: $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} =$ [ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

$x \to 0^-$ $\quad f(x) = \frac{1}{x^2}$

$x\to$	-1	-0.1	-0.01	-0.001
$f(x)\to$	1	100	10000	1000000

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$

0.001	0.01	0.1	1	$\leftarrow x$
1000000	10000	10	1	$\leftarrow f(x)$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Entonces, podemos escribir:

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} =$ [ ] puesto que se verifica: $\lim_{x\to 0} \left|\frac{1}{x^2}\right| = +\infty$

∞

201

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} = ?$$

$x \to 0$ por la izquierda (a través de valores negativos):

$x\to$				
$f(x)\to$				

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \square$$

$x \to 0$ por la derecha (a través de valores positivos):

					$\leftarrow x$
					$\leftarrow f(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \square$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \square$$

Respuesta en el cuadro siguiente

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

$x \to 0^-$

$x\to$	-1	-0.1	-0.01	-0.001
$f(x)\to$	-1	-1000	-1000000	-1000000000

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

$x \to 0^+$

0.001	0.01	0.1	1	$\leftarrow x$
1000000000	1000000	1000	1	$\leftarrow f(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} = \square$$

∞

202

De manera similar:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^4} = \square \\ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^4} = \square \end{array}\right\} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} =$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^5} = \square \\ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^5} = \square \end{array}\right\} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^5} =$$

etcétera

$$\left.\begin{array}{l} +\infty \\ \\ +\infty \end{array}\right\} \infty$$

$$\left.\begin{array}{l} -\infty \\ \\ +\infty \end{array}\right\} \infty$$

203

En resumen, para $n \in \mathbb{Z}^+$:

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} =$ ⌊____⌋ si n es impar

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} =$ ⌊____⌋ si n es par

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} =$ ⌊____⌋

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} =$ ⌊____⌋

Esto será establecido como un teorema, que puede ser demostrado en forma rigurosa.

$-\infty$

$+\infty$

$+\infty$

∞

204

Teorema L12. Límites infinitos en cero.

L12. 1. $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$ si $n \in \mathbb{Z}^+ \wedge$ n es impar

L12. 2. $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$ si $n \in \mathbb{Z}^+ \wedge$ n es par

L12. 3. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$

L12. 4. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = \infty$ $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$

Con fines nemotécnicos, podemos escribir $\frac{1}{0} = \infty$.

205

Regresemos, ahora, a un problema cuya solución habíamos dejado pendiente en un submódulo anterior.

206

Se trata de la evaluación de $\lim_{x \to 2} \frac{3x}{x^2 - 4}$

y en general, de límites de la forma $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

cuando $\begin{cases} \lim_{x \to a} f(x) \neq 0 \\ \text{y} \\ \lim_{x \to a} g(x) = 0 \end{cases}$

207

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x}{x^2 - 4} = ?$$

Recurramos a nuestro familiar procedimiento de evaluación, acercándonos a 2, a través de valores de x menores o mayores que dicho número y observando el comportamiento de la función.

208

$h(x) = \frac{3x}{x^2 - 4}$ $\qquad$ $\lim_{x \to 2} \frac{3x}{x^2 - 4} = ?$

$x \to 2^-$

$x \to$				
numerador$\to$				
denominador$\to$				
$h(x) \to$				

Respuesta en el cuadro siguiente

Observar con mucha atención.

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x}{x^2-4} = ?$$

$x \to 2^-$

$x\to$	1.9	1.99	1.999	1.9999
numerador→	5.7	5.97	5.997	5.9997
denominador→	− 0.39	− 0.0399	− 0.003999	− 0.0004
$h(x)\to$	− 14.62	− 149.62	− 1499.62	− 14999.75

Anotemos nuestras observaciones y comparémoslas con las dadas en el siguiente cuadro.

209

A medida que x se aproxima a 2, por la izquierda:

el numerador parece aproximarse a [ ];

el denominador parece aproximarse a [ ] a través de valores **positivos/negativos;**

el cociente $h(x)\to$ [ ] ← describir su comportamiento

6

0

negativos

decrece sin límite o $h(x)\to -\infty$

210

$h(x)$ $\dfrac{3x}{x^2-4}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x}{x^2-4} = ?$

$x \to 2^+$

				←x
				←numerador
				←denominador
				cociente h (x)

Respuesta en el cuadro siguiente

$h(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 4}$ $\qquad \lim_{x \to 2} h(x) = ?$

$x \to 2^+$

2.0001	2.001	2.01	2.1	←x
6.0003	6.003	6.03	6.3	←numerador
0.0004	0.004001	0.0401	0.41	←denominador
15000.75	1500.37	150.37	15.37	cociente $h(x)$

→

Anotar nuestras observaciones y compararlas con las dadas en el cuadro siguiente.

211

A medida que x se aproxima a 2, por la derecha:

el numerador se aproxima a [ ] ;

el denominador se aproxima [ ] a través de valores **positivos/negativos**;

el cociente $h(x)$ [ ] ← describir su comportamiento

6

0

positivos

crece sin límite o $h(x) \to +\infty$

212

$$h(x) = \frac{3x}{x^2 - 4}$$

Como

$\lim_{x \to 2^-} h(x) =$ [ ]

y

$\lim_{x \to 2^+} h(x) =$ [ ]

} $\lim_{x \to 2} h(x) =$ [ ]

$-\infty$

$+\infty$

} ∞

213

Ahora, consideremos la función $\longrightarrow j(x) = \dfrac{-3x}{x^2 - 4}$ y comparémosla con la que hemos venido analizando en los cuadros anteriores.

Si $x \to 2^-$

el numerador tiende a [ ];
el denominador tiende a [ ]
a través de valores **positivos/negativos;**
el cociente $j(x)$ [ ]
↑ describir su comportamiento

— 6
0
negativos
crece sin límite o
$j(x) \to +\infty$

214

$j(x) = \dfrac{-3x}{x^2 - 4}$ $\qquad \lim\limits_{x \to 2} j(x) = ?$

Si $x \to 2^+$

el numerador tiende a [ ];
el denominador tiende a [ ]
a través de valores **positivos/negativos;**
el cociente $j(x)$ [ ]
↑ describir su comportamiento

— 6
0
positivos
decrece sin límite o
$j(x) \to -\infty$

215

Podemos resumir nuestras observaciones en el siguiente teorema, que puede ser formalmente demostrado.

Teorema L13. Sea $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

en que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c \qquad c \in \mathbb{R} \wedge c \neq 0$

y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

L13.1. Si c es positiva y $g(x)$ tiende a 0 a través de valores positivos:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

Continúa en el cuadro siguiente.

216

L13.2. Si c es positiva y $g(x)$ tiende a 0 a través de valores negativos:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

L13.3 Si c es negativa y $g(x)$ tiende a 0 a través de valores positivos:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

L13.4. Si c es negativa y $g(x)$ tiende a 0 a través de valores negativos:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

217

Expresión nemotécnica: $\frac{c}{0} = \infty$

usada en combinación con
la regla de los signos
para la división:

÷	+	−
+	+	−
−	−	+

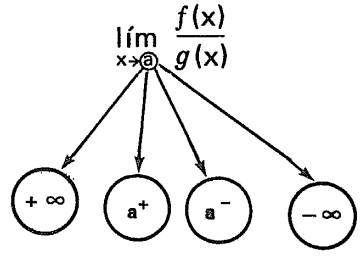
218

El teorema L13 es válido si
$x \to a$
se sustituye por:

$x \to a^+$ o $x \to a^-$

o bien, por:

$x \to +\infty$ o $x \to -\infty$



219

Teniendo en cuenta lo anterior, vamos a evaluar

$$\lim_{x\to 3} \frac{3x-5}{9-x^2}$$

Calculemos, en primer lugar

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{3x-5}{9-x^2}$$

así:

$\lim_{x\to 3^-} (3x-5) =$ [ ]

$\lim_{x\to 3^-} (9-x^2) =$ [ ]

4

0

220

$$\lim_{x\to 3} \frac{3x-5}{9-x^2} = ?$$

$\lim_{x\to 3^-} (3x-5) = 4$

$\lim_{x\to 3^-} (9-x^2) = 0$

Es/no es aplicable el teorema L13, porque

[ ]

es

el límite del numerador es no nulo y el límite del denominador es nulo

221

Atención. $\lim_{x\to 3} \frac{3x-5}{9-x^2} = ?$

$\lim_{x\to 3^-} (3x-5) = 4$ (4 es positivo)

$\lim_{x\to 3^-} (9-x^2) = 0$

Podemos observar que a medida que $x \to 3^-$:

$9 - x^2 \to 0$ a través de valores **positivos/negativos.**

positivos

222

$$\lim_{x\to 3} \frac{3x-5}{9-x^2} = ?$$

$$\lim_{x\to 3^-} (3x-5) = 4$$

$$\lim_{x\to 3^-} (9-x^2) = 0$$

$9 - x^2 \to 0$ a través de valores positivos
luego, de acuerdo con teorema L13:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{3x-5}{9-x^2} = \boxed{\quad}$$

$+\infty$

223

$$\lim_{x\to 3} \frac{3x-5}{9-x^2} = ?$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{3x-5}{9-x^2} = +\infty$$

Ahora calcularemos:

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{3x-5}{9-x^2} = \boxed{\quad}$$

$-\infty$

porque
- $\lim_{x\to 3^+} (3x-5) = \boxed{\quad}$ — 4 (4 es positivo)
- $\lim_{x\to 3^+} (9-x^2) = \boxed{\quad}$ — 0
- y $9 - x^2 \to 0$ a través de valores **positivos/negativos.** — negativos

224

Como $\lim_{x\to 3^-} \frac{3x-5}{9-x^2} = +\infty$

y $\lim_{x\to 3^+} \frac{3x-5}{9-x^2} = -\infty$

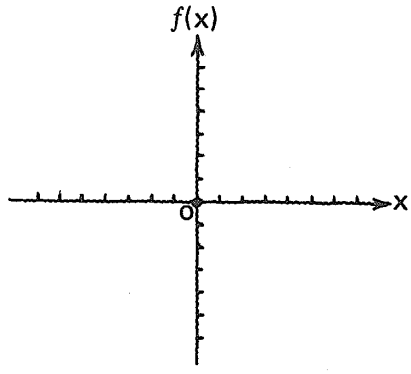
podemos escribir: $\lim_{x\to 3} \frac{3x-5}{9-x^2} = \boxed{\quad}$

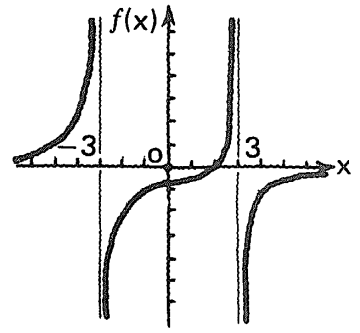
∞

225

Veamos lo anterior en forma gráfica, trazando la curva correspondiente a

$$f(x) = \frac{3x - 5}{9 - x^2}$$





226

Calculemos, para la misma función:

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{3x - 5}{9 - x^2} = \underline{\qquad}$$

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{3x - 5}{9 - x^2} = \underline{\qquad}$$

$$\lim_{x \to -3} \frac{3x - 5}{9 - x^2} = \underline{\qquad}$$

Respuesta en el cuadro siguiente

$\lim_{x \to -3^-} (3x - 5) = -14$

$\lim_{x \to -3^-} (9 - x^2) = 0$

y $9 - x^2 \to 0$ a través de valores negativos.

$\Big\}$ $+\infty$ por TL13.4

$\lim_{x \to -3^+} (3x - 5) = -14$

$\lim_{x \to -3^+} (9 - x^2) = 0$

y $9 - x^2 \to 0$ a través de valores positivos.

$\Big\}$ $-\infty$ por TL13.3

∞

Estos resultados pueden verificarse en la gráfica del cuadro anterior.

227

Además, recordemos que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-5}{9-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-5}{9-x^2} = \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad\qquad}$$

$$\frac{\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{\frac{9}{x^2}-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\frac{\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{\frac{9}{x^2}-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

lo cual puede corroborarse también, en la gráfica.

7.2.8.1

Práctica adicional de evaluación de límites de la forma:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

cuando

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$$

y

$$\lim_{x\to a} g(x) = 0$$

si se considera necesario.

228

Tomemos ahora nota de los siguientes límites especiales:

Teorema L14:

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = c \quad (c \in \mathbb{R})$

entonces

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \infty$$

En forma abreviada: $\infty + c = \infty$.

229

Teorema L15:

Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

y $\lim_{x \to a} g(x) = c$

$(c \in \mathbb{R} \wedge c \neq 0)$

- L15.1. Si c es positiva,

  $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$

- L15.2. Si c es negativa,

  $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = -\infty$

Continúa en el cuadro siguiente.

230

Si $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

y $\lim_{x \to a} g(x) = c$

$(c \in \mathbb{R} \wedge c \neq 0)$

- L15.3. Si c es positiva,

  $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = -\infty$

- L15.4. Si c es negativa,

  $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$

En forma compacta: $c \cdot \infty = \infty$
en combinación con la regla de los signos para la multiplicación.

231

Los teoremas L14 y L15 siguen siendo válidos, cuando $x \to a$ es sustituido por:

$$x \to a^+ \text{ o } x \to a^-$$

o bien, por:

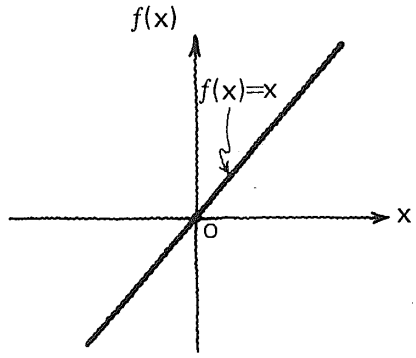
$$x \to +\infty \text{ o } x \to -\infty$$

232

Por ejemplo, de acuerdo con el teorema L15:

$\lim_{x \to +\infty} x =$ _____

$\lim_{x \to -\infty} x =$ _____



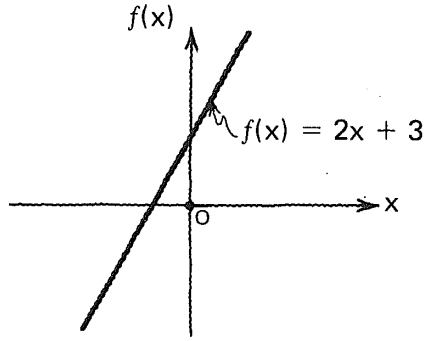
$+\infty$ (c = + 1)

$-\infty$ (c = + 1)

233

$\lim_{x \to +\infty} (2x + 3) =$ _____

$\lim_{x \to -\infty} (2x + 3) =$ _____



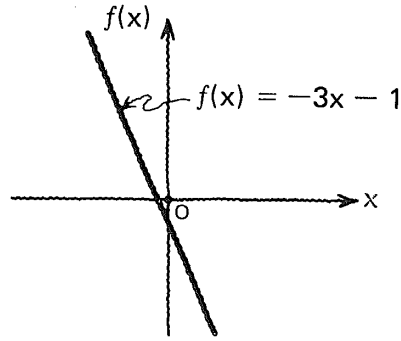
- $\lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$ TL15.1
- $\lim_{x \to +\infty} 3 = 3$ TL1
- $\lim_{x \to +\infty} (2x + 3) = +\infty$ TL14

- $\lim_{x \to -\infty} 2x = -\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} 3 = 3$
- $\lim_{x \to -\infty} (2x + 3) = -\infty$

234

$\lim_{x \to +\infty} (-3x - 1) =$ _____

$\lim_{x \to -\infty} (-3x - 1) =$ _____

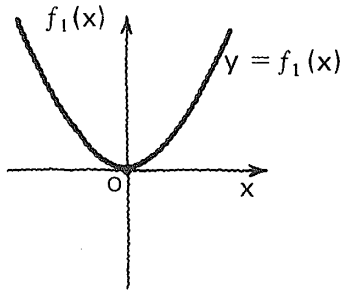


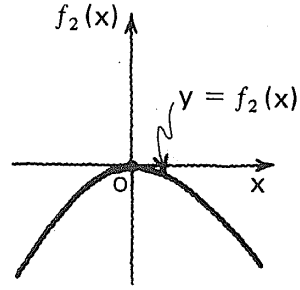
- $\lim_{x \to +\infty} (-3x) = -\infty$ TL15.2
- $\lim_{x \to +\infty} (-1) = -1$ TL1
- $\lim_{x \to +\infty} (-3x - 1) = -\infty$ TL 14

- $\lim_{x \to -\infty} (-3x) = +\infty$ TL 15.4
- $\lim_{x \to -\infty} (-1) = -1$ TL1
- $\lim_{x \to -\infty} (-3x - 1) = +\infty$ TL14

235

Intuitivamente:





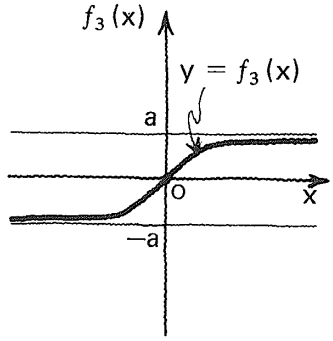
$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) =$ ____ $\lim_{x \to +\infty} f_2(x) =$ ____

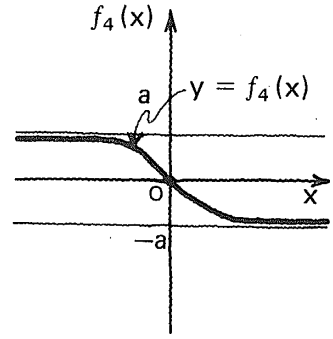
$\lim_{x \to -\infty} f_1(x) =$ ____ $\lim_{x \to -\infty} f_2(x) =$ ____

$+\infty$ $-\infty$

$+\infty$ $-\infty$

236





$\lim_{x \to +\infty} f_3(x) =$ ____ $\lim_{x \to +\infty} f_4(x) =$ ____

$\lim_{x \to -\infty} f_3(x) =$ ____ $\lim_{x \to -\infty} f_4(x) =$ ____

a $-a$

$-a$ a

237

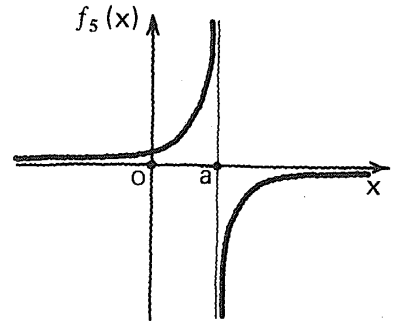
$\lim_{x \to a^-} f_5(x) =$ ____

$\lim_{x \to a^+} f_5(x) =$ ____

$\lim_{x \to a} f_5(x) =$ ____

$\lim_{x \to +\infty} f_5(x) =$ ____

$\lim_{x \to -\infty} f_5(x) =$ ____



$+\infty$

$-\infty$

∞

0

0

7.2.8

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *evaluar* límites de la forma:

  $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

  cuando $\lim_{x \to a} f(x) \neq 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

  mediante la aplicación del teorema L13.

2.9

Resumen

238

Resumen de los teoremas estudiados.

TL1. $\lim_{x \to a} c = c$

TL2. $\lim_{x \to a} x = a$

TL3. $\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$

TL4. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n \quad n \in \mathbb{Z}^+$

TL5. $\lim_{x \to a} [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)] = \lim_{x \to a} f_1(x) \pm \lim_{x \to a} f_2(x) \pm \ldots \pm \lim_{x \to a} f_n(x)$

TL6. $\lim_{x \to a} [f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)] = \lim_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim_{x \to a} f_2(x) \cdot \ldots \cdot \lim_{x \to a} f_n(x)$

TL7. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

TL8. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ si $\sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} \in \mathbb{R}$

TL9. Si $f(x) = g(x)$ para toda $x \neq a$

y $\lim_{x \to a} g(x) = L$

entonces

$\lim_{x \to a} f(x) = L$

TL10. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad n \in \mathbb{Z}^+$

TL11. $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad n \in \mathbb{Z}^+$

TL12.1 $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$ si $n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n$ es impar

TL12.2 $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$ si $n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n$ es par

TL12.3 $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$

TL12.4 $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = \infty \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$

TL13. Sea $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

en que $\lim_{x \to a} f(x) = c \qquad c \in \mathbb{R} \wedge c \neq 0$

y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

TL13.1 Si c es positiva y $g(x)$ tiende a 0 a través de valores positivos:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

TL13.2 Si c es positiva y $g(x)$ tiende a 0 a través de valores negativos:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

TL13.3 Si c es negativa y $g(x)$ tiende a 0 a través de valores positivos:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

TL13.4 Si c es negativa y $g(x)$ tiende a 0 a través de valores negativos:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

TL14. Si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = c \qquad (c \in \mathbb{R})$

entonces:

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \infty$$

240

TL15.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

y $\lim_{x \to a} g(x) = c$

$(c \in \mathbb{R} \wedge c \neq 0)$

15.1. Si c es positiva,
$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$

15.2. Si c es negativa,
$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = -\infty$

Si $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

y $\lim_{x \to a} g(x) = c$

$(c \in \mathbb{R} \wedge c \neq 0)$

15.3. Si c es positiva,
$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = -\infty$

15.4. Si c es negativa,
$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$

7.2.9.1

Práctica de determinación del límite de una función dada, mediante la aplicación de los teoremas estudiados, si se considera necesario.

7.2.9

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* el límite de una función dada, mediante la aplicación de alguno o algunos de los teoremas estudiados.